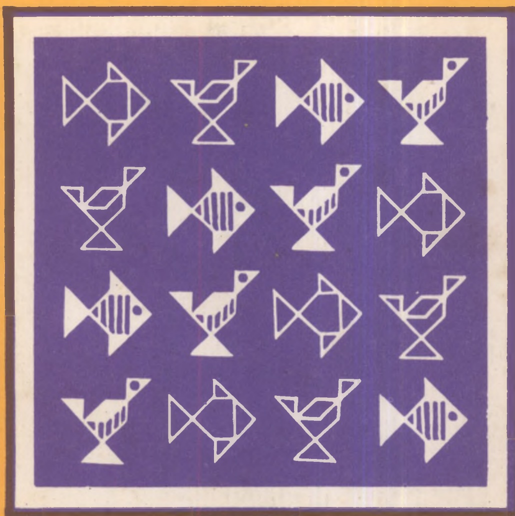
НОВОЕ
В ЖИЗНИ, НАУКЕ,
ТЕХНИКЕ

ЗНАНИЕ

Н. Н. Воробьев

ТЕОРИЯ ИГР



4/1976

СЕРИЯ
МАТЕМАТИКА,
КИБЕРНЕТИКА

НОВОЕ
В ЖИЗНИ, НАУКЕ,
ТЕХНИКЕ

Серия «Математика, кибернетика» № 4,
1976 г.
Издается ежемесячно с 1967 г.

Н. Н. Воробьев,
доктор физико-математических наук

ТЕОРИЯ ИГР

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ЗНАНИЕ»
Москва 1976

5 17
В 17

Воробьев Н. Н.

В 17 Теория игр. М., «Знание», 1976.

64 с. (Новое в жизни, науке, технике. Серия «Математика, кибернетика», 4. Издается ежемесячно с 1967 г.)

Брошюра посвящена прикладным вопросам теории игр. На простых, доступных примерах автор рассказывает о том, как математика помогает принимать оптимальные решения в условиях конфликта и неопределенности. Подробно рассматриваются биматричные и кооперативные игры, задачи природопользования и возможности теории игр в экологии. Брошюра рассчитана на широкий круг читателей.

20 204 **517**

СОДЕРЖАНИЕ

НИКОЛАЙ НИКОЛАЕВИЧ ВОРОБЬЕВ

ТЕОРИЯ ИГР

Редактор В. И. Ковалев. Обложка Л. П. Ромасенко. Худож. редактор В. Н. Конюхов. Техн. редактор А. М. Красавина. Корректор В. И. Гуляева

А 03108 Индекс заказа 64304 Сдано в набор 13/II-76 г. Подписано к печати 19/III-76 г. Формат бумаги 84×108$^1/_{32}$. Бумага типографская № 3. Бум. л. 1. Печ. л. 2. Усл.-печ. л. 3,36. Уч.-изд. л. 3,43. Тираж 46 500 экз. Издательство «Знание», 101835, Москва, Центр, проезд Серова, д. 4. Заказ 255.
Чеховский полиграфический комбинат Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
Цена 11 коп.

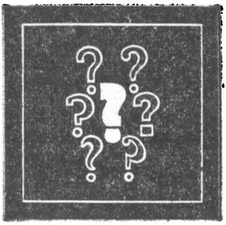
© Издательство «Знание», 1976 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория игр является разделом математики, занимающимся вопросами принятия оптимальных решений в условиях конфликтов. Естественно, что она при этом имеет дело с весьма сложными явлениями и вынуждена конструировать соответственно сложные понятия и разрабатывать сложные решения возникающих задач.

К настоящему времени по теории игр написано на различных уровнях сложности и обстоятельности довольно много книг и брошюр. В данной брошюре автор поставил себе целью ознакомить читателя с некоторыми конкретными типами задач, для решения которых и предназначается теория игр. Это делается на примере серии задач, сформулированных содержательным и даже как бы «сюжетным» образом. Почти все они связаны с выпуском и реализацией некоторыми предприятиями игрушек того или иного вида. Исключение составляют два последних параграфа, где рассмотрены задачи, содержание которых касается вопросов природопользования. Эти задачи воплощают тот же круг формальных идей, что и задачи из двух предшествующих параграфов. Однако автор, разделяющий ту точку зрения, что экологические проблемы имеют в нашей жизни исключительную, первостепенную важность, счел необходимым специально проиллюстрировать прикладные возможности теории игр еще и примерами экологического содержания.

В книжке не излагается никаких теорий и не доказывается никаких теорем. В ней всего лишь формулируются и решаются некоторые вполне конкретные задачи, но делается это достаточно точно и последовательно. Все вводимые термины и понятия подробно разъясняются. От читателя требуется лишь поверхностное знание обычного школьного математического материала, что, впрочем, не так уже и мало, особенно если иметь в виду читателя, не возвращавшегося к занятиям математикой после окончания им школы. Автор стремился свести к минимуму математическую символику, за что пришлось расплачиваться тяжеловесностью некоторых фраз. Во всяком случае к чтению брошюры нельзя подходить как к совсем уж легкому делу, и заниматься им следует, имея в руках карандаш.



§ 1. ВВЕДЕНИЕ

1. По существу любой осознанно совершаемый или хотя бы задуманный поступок человека связан с тем, что ему приходится принять решение, т. е. сделать выбор из имеющихся в его распоряжении возможностей. При этом естественно стремиться к выбору не каких попало, а наилучших, разумных, целесообразных возможностей, которые теперь принято называть *оптимальными.*

Практически очень частым и потому очень важным представляется случай, при котором оптимальное решение ищется в условиях, когда приходится одновременно преследовать различные цели. Такого рода условия принятия решений встречаются весьма часто.

Они возникают, например, каждый раз, когда приходится согласовывать противоречивые технические или технико-экономические требования, предъявляемые к некоторому изделию: известно, что трудно и даже не всегда возможно создать конструкцию, которая имела бы одновременно наименьший вес, габариты и себестоимость, высокую надежность, была проста в изготовлении, не требовала применения дефицитных материалов и использования дефицитного оборудования и т. д.

Сложной хозяйственной задачей является оптимизация деятельности предприятия одновременно по многим отчетным показателям.

Невозможно, составляя процедуру текущего статистического контроля качества продукции при заданной технологии производства, одновременно уменьшить долю пропущенного брака, вероятность напрасного вмешательства в производственный процесс и объем контрольных работ.

Как с точки зрения формальных постановок задач, так и с точки зрения математических трудностей, возникающих при их решении, оказывается сравнительно второстепенным, будут ли различные цели отражать многосторонние интересы одного и того же принимающего решение субъекта или же интересы различных сторон.

Так, если в условиях социалистической системы хозяйства мы говорим о согласовании работы предприятий во имя общегосударственных интересов, то мы не снимаем задачи одновременной оптимизации деятельности каждого из них, а включаем ее в другую, обычно даже еще более трудную задачу — в задачу о многосторонней оптимизации хозяйственной деятельности отрасли (или региона, или даже народного хозяйства в целом), в которую входит также и исходная оптимизация работы отдельных предприятий.

Явно противоречивыми являются цели фирм в условиях капиталистической системы хозяйства, борющихся за рынки сбыта.

Тем более ясно, что составленный список можно пополнить перечнем случаев непосредственной борьбы: военной и дипломатической, экономической и «престижной», а также борьбы, описываемой спортивными, «салонными» или азартными играми и т. д.

2. Все явления, существенной чертой которых является наличие многих целей и, в частности, различие целей, интересов участвующих в них сторон, принято называть *конфликтами*. Здесь не место обсуждать, насколько правильно выбрано такое название и насколько «конфликтными» являются в действительности все такие явления, ибо это было бы в полном смысле слова спором о словах.

Пусть несколько предприятий выпускают однотипные, но отличающиеся друг от друга изделия, предназначенные для широкого потребления. В капиталистических условиях эти предприятия оказываются конкурентами и должны осуществлять свою деятельность с целью максимизации прибыли в условиях борьбы за рынок, реагирующий ценами на объем предлагаемой продукции. Вопрос о выборе каждым предприятием конкретного вида выпускаемой продукции и ее количества оказывается здесь весьма непростым. Если же рассматриваются предприятия, работающие в условиях социалистической системы хозяйства, то их деятельность должна быть направлена на то, чтобы в наибольшей степени удовлетворять соответствующие потребности общества. В чем же конкретно должна состоять эта деятельность, чтобы она действительно отвечала интересам народного хозяйства в целом? В чем состоят оптимальные действия предприятий, если общественные потребности в данных предметах потребления не вполне определены? Как следует сочетать интересы предприятий с интересами народного хозяйства в целом (т. е. экономически стимулировать деятельность предприятий), соблюдая при этом правовые и социальные нормы? Заметим, что уже сама постановка вопроса о сочетании одних интересов с другими предполагает их различие, подлежащее преодолению.

Еще пример. Хирург должен быстро и правильно принять решение по поводу поступившего к нему больного с тяжелой травмой. Но он не всегда может дожидаться данных тех анализов, которые позволят поставить точный и достоверный диагноз. Можно надеяться, что техника диагностики позволит со временем ставить такие диагнозы достаточно быстро. Однако как поступать, пока такой диагностической методики еще нет?

3. Как постановка, так и решение вопроса об оптимальных решениях в условиях конфликта оказывается весьма сложным и трудным делом.

Одним из путей преодоления возникающих здесь трудностей является м а т е м а т и з а ц и я всей проблемы, т. е. формулировка задач вполне четким и по возможности количественным образом и их решение математическими (формальными) методами. В результате математизации разнообразных задач о принятии оптимальных решений в условиях конфликтов за последние десятилетия сформировался целый новый раздел математики, называемый *теорией игр*.

4. Игрой в теории игр называется достаточно схематизированное и приспособленное для математического изучения описание (модель) конфликта. При этом, разумеется, описывающая конфликт игра должна сохранять все основные, существенные черты моделируемого конфликта. Прежде всего в игре должны быть отражены характеристики («компоненты») конфликта:

1) участвующие в конфликте стороны (в теории игр их часто называют *игроками*);

2) те решения, которые игроки могут принимать (эти решения обычно называются *стратегиями* игроков);

3) степень осуществления целей каждого игрока в *ситуации*, складывающейся в результате выбора игроками своих стратегий (эти последние характеристики часто можно измерять числами, которые называются *выигрышами* игроков в соответствующих ситуациях; функция, ставящая в соответствие каждой ситуации выигрыш игрока, называется *функцией выигрыша* этого игрока).

Точное описание множества игроков, множеств стратегий для каждого игрока, а также их функций выигрыша и составляет задание игры. Игры, заданные в таком виде, обычно называются *играми в нормальной форме*.

Заметим, что игроком не обязательно является отдельное физическое лицо; игрок — это сторона, отстаивающая единые интересы. Поэтому игроком в спортивной игре может быть целая команда; в хозяйственной жизни — предприятие, фирма, объединение; в военном конфликте — воюющая сторона; в общественных явлениях это могут быть классы или социальные группы и т. д. Иногда в качестве игрока бывает удобно понимать природу, формирующую обстоятельства, в которых приходится принимать решения.

Понятие стратегии довольно сложно и заслуживает того, чтобы его разъяснить несколько более подробно. Дело в том, что решениями игрока, его стратегиями, являются по существу не сами выбираемые игроком действия, а правила их выбора в зависимости от обстоятельств, в которые попадает игрок к моменту принятия им решения. Так, в шахматах стратегией игрока может быть принцип, устанавливающий, как игрок стал бы ходить в любой из позиций, которые встречаются в ходе шахматных партий (ясно, что для игры в шахматы описание стратегии в этом смысле слова практически невозможно, однако при игре в «мини-шахматы», каковыми являются шахматные задачи и этюды, это не только выполнимо, но именно и является решением задачи).

Заметим далее, что принимающий решение субъект всегда принимает свое решение на основе того, что он знает (или хотя бы думает, что знает) об обстановке. Знания же его могут и не быть исчерпывающими. Так, возвращаясь к теоретико-игровой терминологии, игрок может не знать того истинного, «физического» состояния, в котором он находится; его информация может ограничиваться знанием лишь целой группы физических состояний, в одном из которых он находится на самом деле. Например, при игре в домино игрок знает только кости, имеющиеся у него на руках, а расклад остальных костей в начале партии для него совершенно неизвестен. Иногда такая неполная информация приобретает более конкретную форму, сводясь, например, к драматическому незнанию того, у партнера или у противника находится «зарубаемый дупель». Такая группа неразличимых физических состояний игрока называется его *информационным состоянием*.

Стратегия игрока является таким образом правилом выбора некоторого действия в каждом информационном состоянии, или, выражаясь более математически, *стратегия игрока есть функция, определенная на множестве всех его информационных состояний, значения которой суть действия, доступные в соответствующем информационном состоянии*.

5. Не следует придавать какого-либо особого значения употребляемой в теории игр «игрушечной» терминологии и тем более порицать ее. Она удобна прежде всего тем, что не нуждается в каких-либо специальных пояснениях. Кроме того, сами игры состязательного характера (будь то спортивные, «салонные» типа шахмат, домино, а также различные игры в карты или же «подвижные» вроде пятнашек, игр в прятки и т. п.) издавна служили примерами моделей реальных конфликтов. Можно сказать, что традиционные состязательные игры являются «макетными» (или, как иногда теперь выражаются, «иконическими») моделями конфликтов, а теория игр рассматривает их «знаковые» (формальные) модели. Именно глубокие аналогии в структуре некоторых игр состязательного типа, с одной стороны, и отдельных явлений, наблюдаемых в конкурентной (капиталистической) экономике, с другой, и заставили создателей теории игр Дж. фон Неймана и О. Моргенштерна озаглавить свою вышедшую в 1944 г. основополагающую монографию «Теория игр и экономическое поведение»[1]).

---

[1] Русский перевод опубликован издательством «Наука» в 1970 г.

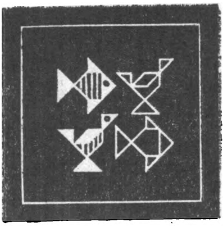
6. Принятие оптимальных решений в условиях конфликта должно начинаться с выяснения того, что именно следует понимать под оптимальностью. Уже этот вопрос является весьма сложным и не имеет однозначного решения. Его можно считать первым основным вопросом теории игр.

После того как принцип оптимальности выбран, т. е. установлено, какими свойствами должны обладать ситуации, чтобы считаться достаточно разумными, выгодными, справедливыми, словом, «оптимальными» исходами игры, необходимо убедиться в существовании таких ситуаций, т. е. в реализуемости выбранного принципа оптимальности. В этом состоит второй основной вопрос теории игр. Сколь угодно прекрасный принцип оптимальности, если он не имеет реализаций в данной игре, оказывается для этой игры чисто утопическим.

К сожалению, применяемые в современной математике доказательные средства нередко таковы, что установление реализуемости принципа оптимальности применительно к некоторой игре еще не означает явного указания каких-либо реализаций. Поэтому их вычисление, фактическое нахождение становится самостоятельной, третьей, основной задачей теории игр.

7. Рассматриваемые в теории игр объекты, т. е. игры, чрезвычайно разнообразны, так что единые подходы к сколько-нибудь широким классам игр требуют использования весьма мощных и сложных математических средств, изложение которых, даже самое поверхностное, в рамках данной брошюры просто невозможно. Поэтому мы будем вести дальнейшее изложение на примерах, иллюстрируя с их помощью различные классы игр, применяемые в них принципы оптимальности и их реализации.

Приводимые примеры будут носить характер объединенных общим сюжетом коротких рассказов о столкновениях различных точек зрения на почве хозяйственной деятельности. Это отнюдь не будет означать, что такого рода коллизии действительно имели место где-либо или хотя бы могли иметь место. В условиях рассматриваемых задач сохранены лишь отдельные, весьма немногочисленные черты реальной хозяйственной жизни, и поэтому следует считать, что они соответствуют не столько фактической действительности, сколько некоторой «искусственной» действительности. Однако автор постарался вложить в описываемые ситуации некоторые черты правдоподобия, и можно надеяться, что сходные хозяйственные схемы действительно встречаются и поддаются теоретико-игровому анализу уже на том элементарном математическом уровне, на котором написана данная брошюра.



§ 2. ПРЕДПОЧТЕНИЯ

1. Предметы можно сравнивать и упорядочивать не только по таким их объективным характеристикам, как, например, их величина, вес, цена и т. п., но и по субъективному отношению к ним, по их привлекательности, по тому, какой предмет нравится больше, а какой — меньше, какой предмет из двух предпочтительнее. При этом различные лица могут для одних и тех же предметов устанавливать различные предпочтения.

Рассмотрим, например, детей, упорядочивающих по привлекательности показываемые им четыре елочные игрушки: цветную птичку (далее иногда сокращенно обозначаемую как *ЦП*), серебристую птичку (*СП*), цветную рыбку (*ЦР*) и серебристую рыбку (*СР*). Предположим, что по данным проведенного психологического обследования некоторый контингент детей оказался разделенным на четыре группы, установившие порядки предпочтения, описываемые следующей таблицей.

Таблица 1

№ группы	Предпочтительность по порядку для этой группы
1-я	*СР, СП, ЦР, ЦП*
2-я	*СП, ЦР, ЦП, СР*
3-я	*ЦР, ЦП, СР, СП*
4-я	*ЦП, СР, СП, ЦР*

Пусть при этом оказалось, что группы детей, придерживающихся порядков предпочтения 1, 2, 3 и 4, составляют соответственно 10, 20, 30 и 40 от общего числа детей, а детей, утверждающих иные порядки предпочтения, просто нет [1].

Можно ли в описанных условиях устанавливать какое-либо разумное упорядочение по предпочтению для рассматриваемого нами контингента детей в целом? Можно ли хотя бы выбрать игрушку, выпуск которой удовлетворил бы детей в наибольшей степени?

2. Голосование «на лучшую игрушку» по правилу относительного большинства даст, очевидно, перевес цветной птичке, которая соберет 40% голосов. Ближайший конкурент, цветная рыбка, соберет лишь 30% голосов.

Однако сторонники цветной рыбки могут поставить на голосование вопрос: какая игрушка из двух лучше, цветная птичка или цветная рыбка? Из таблицы порядков видно, что за цветную рыбку при сравнении с цветной птичкой будут голосовать 1, 2 и 3-я группы и всего за эту игрушку будут подано 60% голосов против 40%, поданных за цветную птичку. Далее нам понадобится рассматривать различные голосования такого типа. Поэтому для удобства читателей мы вычислим впрок результаты всех таких голосований и сведем их в следующую «турнирную» таблицу.

Таблица 2

	ЦП	*ЦР*	*СП*	*СР*
ЦП	*X*	40%	70%	90%
ЦР	60%	*X*	30%	50%
СП	30%	70%	*X*	20%
СР	10%	50%	80%	*X*

Но борьба мнений на сравнении цветной рыбки с цветной птичкой может и не закончиться. Дети, предпочитающие серебристую птичку, могут потребовать сравнения

---

[1] Подчеркнем, что эти предположения составляют условия задачи. Оспаривать их — это то же самое, что, прочтя в условии задачи по геометрии: «пусть нам дан прямоугольный треугольник», начать задавать глубокомысленные вопросы вроде: «а что, если нам дан треугольник, в котором нет прямого угла?», «а возможно ли появление в данных обстоятельствах прямоугольного треугольника?» и т. д.

голосованием своего фаворита с только что победившей цветной рыбкой. В этом голосовании 1, 3 и 4-я группы, составляющие 70% голосов, выскажутся за серебристую птичку и лишь 30% за цветную рыбку.

Но и серебристую птичку нельзя считать окончательным победителем. При ее сравнении голосованием с серебристой рыбкой в пользу птички выскажется лишь 20% детей, а за рыбку — все остальные, т. е. 80%.

Наконец, сравнение серебристой рыбки с самым первым фаворитом, цветной птичкой, приводит к уверенной победе последней: 90% против 10%.

Но тогда снова могут поднять голову приверженцы цветной рыбки, и вся история повторится сначала.

Таким образом, определение лучшего варианта путем последовательных голосований может приводить к противоречиям. Это несколько неожиданное явление было обнаружено еще в XVIII веке; его исследовал Кондорсе.

3. Не прояснит вопроса о лучшей игрушке и попытка осуществить голосование по так называемой «олимпийской» системе (которую в наши дни в соответствии с практикой спортивных состязаний естественно было бы называть «кубковой»).

Из той же табл. 2 видно, что при объединении «в предварительные подгруппы» игрушек, не имеющих общих признаков, мы получаем следующую схему розыгрыша:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{ЦП}\\ \text{СР}\end{array}\right\}\ \text{ЦП}\\ \left.\begin{array}{l}\text{ЦР}\\ \text{СП}\end{array}\right\}\ \text{СП}\end{array}\right\}\ \text{ЦП}$$

Если же в предварительные подгруппы объединить игрушки по признаку цвета (цветные и серебристые), то картина будет существенно иной:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{ЦП}\\ \text{ЦР}\end{array}\right\}\ \text{ЦР}\\ \left.\begin{array}{l}\text{СП}\\ \text{СР}\end{array}\right\}\ \text{СР}\end{array}\right\}\ \text{ничья}$$

При этом никакие «перебаллотировки» последнего ничейного счета не изменят, ибо он (в отличие от исхода реального спортивного состязания) связан не со случайностями борьбы, а с зафиксированными мнениями голосующих. Мы же здесь интересуемся как раз выбором наилучшей игрушки на основе этого мнения.

Наконец, объединение игрушек в предварительные группы по их форме (птички и рыбки) дает нам победу *ЦП* в полуфинале птичек и ничью в полуфинале рыбок. Как мы уже говорили, ничья сама по себе «неразрешима». Поэтому здесь напрашивается вывод: сравнивать цветную птичку последовательно с обеими рыбками (то обстоятельство, что при этом одна из игрушек участвует в большем числе сравнений, чем другие, не изменит в отличие от многих спортивных состязаний их шансов на победу; мы предполагаем, что в результате голосования сравнительные привлекательности игрушек не изменяются). Но исход в этом случае будет опять-таки зависеть от порядка сравнений:

$$\left.\begin{matrix} \text{ЦП} \\ \text{СР} \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} \text{ЦП} \\ \text{ЦР} \end{matrix}\right\} \text{ЦР}$$

и

$$\left.\begin{matrix} \text{ЦП} \\ \text{ЦР} \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} \text{ЦР} \\ \text{СР} \end{matrix}\right\} \text{ничья}$$

4. Попытаемся определить наилучшую игрушку, используя табл. 2, как будто она является таблицей матч-турнира, а приведенные в ней проценты суть очки, полученные игрушкой при ее сравнении с каждой из остальных. Будем определять победителя по сумме набранных очков (правда, не совсем ясно, какой смысл имеет такое суммирование, но никаких более убедительных способов определения лучшей игрушки мы пока ведь не имеем!).

При таком подсчете цветная птичка займет I место с 200 очками, обе рыбки разделят II—III места со 140 очками каждая, а на последнем, IV месте будет серебристая птичка, набравшая лишь 120 очков.

Вспомним, однако, что цель наших рассуждений принципиально отличается от рассмотрения таблицы реального матч-турнира, скажем, шахматистов. Там речь идет об определении победителя в некотором совершенно определенном виде соревнования (в условия которого входят и жеребьевка, определяющая очередность встреч, и временной регламент ходов в каждой партии и, наконец, календарное расписание туров), а вовсе не об объективном присуждении титула «лучшего шахматиста» среди участников турнира или матч-турнира[1]. Здесь же мы как раз заинтересованы в определении л у ч ш е й игрушки, а отнюдь не той, которая соберет наибольшее число очков по тем или иным нами же придуманным правилам.

Поэтому после подведения итогов нашего фиктивного турнира естественно продолжить рассуждения следующим образом. Серебристая птичка оказалась явным «аутсайдером» и поэтому логично, исключив ее вовсе из дальнейших рассмотрений, сравнивать оставшиеся игрушки в следующем турнире, в котором только они и будут участвовать. Таблица этого турнира получается из табл. 2, если вычеркнуть из нее строку и столбец, соответствующий *СП*. В этом турнире победителем по-прежнему будет *ЦП* с 130 очками, II место достанется *ЦР* со 110 очками, а на последнем месте окажется *СР*, у которой будет только 60 очков. По итогам этого второго турнира следует отбросить *СР* и определить окончательного победителя в третьем турнире (фактически это будет уже матч) с участниками *ЦП* и *ЦР*. Но в нем победу одержит *ЦР*, что, однако, противоречит результатам первых двух турниров.

5. Мы видим, что в условиях заданных различных предпочтений обычные подходы к определению наилучшей игрушки могут и не привести к цели. Это свидетельствует о том, что может оказаться полезной модификация с а м о г о́ п о н и м а н и я «наилучшего», «оптимального». Возможна, например, следующая точка зрения.

Поставим вопрос о том, выбор какой игрушки и л и к а к и х н е с к о л ь к и х и г р у ш е к естественно считать наилучшим, оптимальным.

Во-первых, среди этих игрушек (если их несколько) не должно быть предпочитаемых друг другу. Это свойство выбранного множества игрушек назовем его *внутренней устойчивостью*. По существу оно означает, что после оптимального выбора противопоставление хорошего — лучшему должно быть уже исключено.

Во-вторых, каждая игрушка из числа невыбранных (т. е. из тех, которые мы не признали оптимальными) должна предпочитаться некоторой игрушке из числа выбранных (оптимальных). Это свойство выбираемого множества называется его *внешней устойчивостью*. Оно означает, что всякому отклонению от установленного опти-

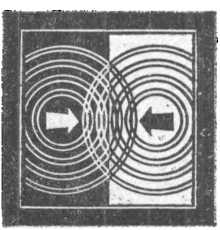
[1] Заметим, что и русским эквивалентом английского слова «чемпион» является именно «победитель», а не «лучший».

мума можно противопоставить вариант, этому оптимуму принадлежащий.

Такие «оптимальные множества», обладающие свойствами внутренней и внешней устойчивости, встречаются в различных разделах математики, имея там различные названия. В теории игр их принято называть *решениями по Нейману — Моргенштерну*, или, короче, *Н-М-решениями.*

В случае рассматриваемой задачи *Н-М-решение*, как нетрудно убедиться, состоит в выборе обеих рыбок: внутренняя устойчивость этой пары игрушек проявляется в цифрах 50% и 50% турнирной таблицы, а внешняя устойчивость в том, что альтернативе в виде *ЦП* успешно будет противостоять *ЦР*, а альтернативе в виде *СП—СР*. Иных *Н-М-решений* в нашей задаче быть не может, уже хотя бы потому, что нет никаких других внутренне устойчивых пар, а если *Н-М-решение* состояло бы из единственной игрушки, то эта игрушка должна была бы быть просто лучше каждой из остальных; такой же игрушки, как мы видели, в условиях нашей задачи нет.

6. После всего сказанного у читателя уже не должно возникать вопроса о том, какая же игрушка является н а с а м о м д е л е наилучшей. В такой постановке этот вопрос лишен смысла и не потому, что нами не уточнено, в каком отношении, по какому признаку мы сравниваем предметы (в качестве этого признака берется удовлетворение игрушкой определенных потребностей); этот вопрос необходимо дополнить указанием на то, какое содержание вкладывается в с а м о п о н я т и е оптимальности. Но, как было сказано во «Введении», в этом и состоит первый основной вопрос теории игр.



§ 3. АНТАГОНИСТИЧЕСКАЯ ИГРА С ПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

1. Пусть описанное в § 2 сравнение игрушек было проведено психологами в небольшом городе, где цеха ширпотреба двух местных предприятий под названиями «Заря» и

«Луч» предполагают выпустить оригинальную елочную игрушку к Новому году. У предприятия «Заря» от предыдущих сезонов остались штампы для изготовления птичек, а, у предприятия «Луч» — для изготовления рыбок, что ограничивает планы этих предприятий игрушками соответствующей формы.

Каждое предприятие может выпустить игрушки в одном из вариантов: цветном и серебристом, причем себестоимость и продажная цена всех четырех видов игрушек одинаковы. Одновременный же выпуск предприятием игрушки в цветном и в серебристом вариантах с самого начала признан экономически невыгодным и поэтому не рассматривается.

За пределы города эта продукция вывозиться не будет. В самом же городе, как установили социологи, специалисты по прогнозированию спроса, найдет сбыт 1 тыс. шт. игрушек всех четырех описанных видов, причем в случае выпуска игрушек двумя предприятиями спрос на них распределится в соответствии с данными табл. 2.

2. Описанное положение дел можно понимать как игру, в которой участвуют два игрока — предприятия «Заря» и «Луч», а их выигрыши определяются количествами реализованных игрушек. Так как по условию общий спрос в городе на рассматриваемые игрушки составляет 1 тыс. шт., суммарный выигрыш обоих предприятий от реализации данных игрушек будет постоянен. Такие игры принято называть *играми с постоянной суммой* (выигрышей игроков). В играх такого типа всякое увеличение выигрыша одного игрока приведет к уменьшению выигрыша другого, и наоборот. Значит, в условиях игры с постоянной суммой никакие совместные выборы стратегий игроками или же соглашения между ними не могут послужить на пользу обоим игрокам сразу. Поэтому такие игры обычно в теории игр называются *антагонистическими*. Подчеркнем, что так введенное понятие антагонизма соответствует наиболее прямолинейному варианту философской категории антагонизма, которая, разумеется, не укладывается в схему «равенства по величине и противоположности по знаку». Поэтому многие противоречия, носящие с философской точки зрения антагонистический характер, не поддаются схематизации в рамках антагонистических игр.

3. Обратимся к стратегиям игроков в рассматриваемой игре. Они будут определяться тем, в каких информационных состояниях будут оказываться игроки (точнее говоря, те работники предприятий, которые будут принимать решения о выпуске игрушек). В этом параграфе мы рассмотрим случай различной информированности игроков. Именно, мы будем считать, что руководство «Луча» своевременно узнает, какую игрушку намерена выпустить «Заря», а когда «Заря» узнает, какую игрушку решил выпустить «Луч», перестраиваться ей будет уже поздно.

Опишем стратегии участников игры в этих предположениях. «Заря» по условию не знает, какую игрушку выпустит «Луч». Это состояние незнания является ее единственным информационным состоянием. «Заря» может придерживаться одного из двух действий: выпускать *ЦП* или *СП*. Очевидно, эти действия и будут стратегиями «Зари».

«Луч» может оказаться в одном из двух информационных состояний:

1) знать, что «Заря» намерена выпускать *ЦП* и

2) знать, что «Заря» намерена выпускать *СП*.

В каждом из этих состояний это предприятие выбирает одно из двух действий: выпускать *ЦР* или *СР*. Поэтому всего у «Луча» имеются четыре стратегии:

1) в ответ на *ЦП* выпускать *ЦР* и в ответ на *СП* — тоже *ЦР*;

2) в ответ на *ЦП* выпускать *ЦР*, а в ответ на *СП*—*СР*;

3) в ответ на *ЦП* выпускать *СР*, а в ответ на *СП*—*ЦР*;

4) в ответ на *ЦП* выпускать *СР*, а в ответ на *СП* — тоже *СР*.

Всего в рассматриваемой игре может таким образом сложиться $2\times4=8$ ситуаций. Эти ситуации вместе с выигрышами участников игры в каждой из них естественно расположить в виде следующей таблицы.

Таблица 3

Стратегии «Луча» / Стратегии «Зари»	*ЦП→ЦР* *СП→ЦР*	*ЦП→ЦР* *СП→СР*	*ЦП→СР* *СП→ЦР*	*ЦП→СР* *СП→СР*
ЦП	*ЦП—ЦР* 40:60	*ЦП—ЦР* 40:60	*ЦП—СР* 90:10	*ЦП—СР* 90:10
СП	*СП—ЦР* 70:30	*СП—СР* 20:80	*СП—СР* 70:30	*СП—СР* 20:80

Здесь в верхней строчке каждой клетки, соответствующей ситуации, указаны выпускаемые в этой ситуации игрушки, а в нижней строчке — «счет» процентов проданных игрушек. Ввиду того что из описания стратегий уже следует, какие игрушки будут в каждой ситуации выбраны, их перечень можно в соответствующей клетке и не помещать. Так как стратегии «Зари» и «Луча» были выписаны нами ранее, их можно также в таблице не указывать. Наконец, задание процента проданной игрушки «Зари» в наших условиях (постоянство сумм!) вполне определяет процент проданных игрушек «Луча» (в сумме они составляют 100%); поэтому достаточно указывать только первое из этих чисел. После таких упрощений наша таблица приобретает вид:

$$\begin{pmatrix} 40 & 40 & 90 & 90 \\ 70 & 20 & 70 & 20 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Такие таблицы в математике называются *матрицами*. Очевидно, всякая антагонистическая игра, в которой каждый игрок имеет конечное число стратегий, может быть представлена в таком виде. Поэтому все антагонистические игры с конечным числом стратегий игроков называются *матричными играми*, а соответствующие им матрицы — *матрицами выигрышей*. Говоря формально, стратегии «Зари» оказываются при этом строками матрицы выигрышей, а стратегии «Луча» — ее столбцами. Игрока, выбирающего строки, принято называть «первым игроком» («игрок 1»), а игрока, выбирающего столбцы, — «вторым игроком» («игрок 2»). В матрицах выигрышей матричных игр принято записывать выигрыш именно игрока 1, т. е. ущерб, нанесенный игроку 2 (в данном случае по сравнению с тем положением дел, когда он получал бы все 100% выигрыша).

4. Поставим вопрос о наилучших (оптимальных) стратегиях игроков в матричной игре с матрицей выигрышей (1).

Если игрок 1, выбирая какую-либо строку матрицы, интересуется своим гарантированным выигрышем (например, если он достаточно осторожен), то он должен допускать, что его противник, игрок 2, выбирает тот столбец, на котором эта строка имеет минимальный элемент. Этот минимальный выигрыш и является поэтому его гарантированным выигрышем. Значит, для игрока 1 естественно выбрать такую стратегию — строку, в которой его гарантированный выигрыш максимален. Иными словами, он выбирает такую строку, в которой минимальный элемент оказывается наибольшим. Этот наибольший среди наименьших элемент в теории игр называется *максимином*, а вся описанная точка зрения игрока 1 — *максиминной*. Выбираемая игроком в соответствии с максиминной точкой зрения стратегия называется его *максиминной стратегией*. Стремление игрока получить именно максиминный выигрыш является достаточно разумным в антагонистической игре принципом оптимальности.

В нашем примере игрок 1, выбирая первую строку матрицы, должен считаться с возможностью, что он получит только 40, а выбирая вторую строку — только 20. Так как 40 больше, чем 20, число 40 является максимином. Следовательно, для игрока 1 в данной игре будет разумно выбрать первую строку матрицы.

Максиминная стратегия игрока 1 обладает следующим свойством устойчивости: отклонение игрока от максиминной стратегии не может привести к увеличению его уверенного (гарантированного, минимального) выигрыша. Поэтому у игрока 1 нет оснований отклоняться от максиминной стратегии.

Проведем теперь аналогичные рассуждения за игрока 2. Если он выбрал некоторый столбец, то его наибольший ущерб будет равен наибольшему в этом столбце элементу. Поэтому для игрока 2 естественно выбрать такой столбец, где этот наибольший элемент будет минимальным. Этот элемент называется *минимаксом*, а соответствующая стратегия игрока 2 — *минимаксной стратегией*. Величина минимакса есть, таким образом, тот выигрыш, больше которого игрок 2 не может уверенно дать игроку 1.

В рассматриваемом конкретном случае максимальные элементы в столбцах соответственно равны 70, 40, 90 и 90, а наименьший из них равен 40 и находится во втором столбце. Следовательно, для игрока 2 оптимальным будет выбор второго столбца матрицы. Заметим, что в данной матрице минимакс оказался равным максимину. Их общее значение называется *значением* игры.

Таким образом, значение игры есть тот выигрыш игрока 1, который он заведомо может получить, а больше которого ему заведомо могут не дать. Тем самым в значении игры проявляются черты своего рода р а в н о в е с н о с т и.

Минимаксная стратегия игрока 2 устойчива примерно в том же смысле, в каком устойчива максиминная стратегия игрока 1. Именно, никакое отклонение игроком 2 от минимаксной стратегии не может уменьшить его возможных потерь.

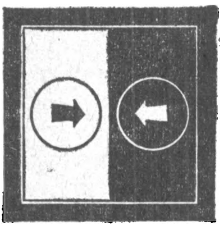
Мы видим, что в рассматриваемой игре ситуация, образованная выбором первой строки и второго столбца матрицы, такова, что отклоняться от нее невыгодно ни одному из игроков. Такие ситуации в теории игр называются *ситуациями равновесия*. Можно вполне элементарно (и притом достаточно просто) доказать, что для наличия в антагонистической игре ситуации равновесия необходимо и достаточно равенство максимина и минимакса в ее матрице выигрышей.

Понимание ситуации равновесия как такой ситуации, от которой ни одному игроку нецелесообразно отклоняться (в предположении, что остальные игроки сохраняют свои стратегии из ситуации равновесия), позволяет говорить о ситуациях равновесия и в играх, не являющихся антагонистическими, и даже в играх с числом участников бóльшим, чем 2.

Ситуации равновесия и только они могут быть предметом договоров между игроками. Действительно, если игроки договорятся играть так, чтобы получилась ситуация равновесия, то ни один из игроков не извлечет для себя пользы, нарушив этот договор. Наоборот, попытка зафиксировать в договоре неравновесную ситуацию приведет к тому, что хотя бы у одного из игроков окажутся стимулы во имя увеличения своего выигрыша этот договор нарушить (заметим при этом в скобках, что мы сейчас не касаемся нравственных проблем, связанных с нарушением договора; теоретико-игровой учет этих соображений в принципе возможен, но приводит к играм другого типа, довольно сложным).

5. Возвращаясь к содержательной терминологии, мы можем сказать, что оптимальная стратегия «Луча» будет состоять в выпуске игрушек того же цвета, что и игрушки, выпускаемые «Зарей», а оптимальная стратегия «Зари» — выпускать цветную птичку. Поэтому фактически «Луч» должен выпускать цветную рыбку.

В сущности, этот вывод можно было бы сделать и на основе достаточно элементарных рассуждений, без всякой теории игр, единственно на основе рассмотрения табл. 2 или даже первичной табл. 1. Мы, однако, привели этот пример, во-первых, как удобный для введения основных понятий теории игр, а во-вторых, по следующему соображению: читатель, рассмотревший пример использования теоретико-игровых рассуждений в том случае, когда он может сам, опираясь лишь на здравый смысл, найти правильное решение задачи и убедившийся в том, что ответ, даваемый теорией игр, с этим решением совпадает, склонен будет довериться выводам теории игр и в тех случаях, когда он не сможет проверить их итог привычными для него рассуждениями. Первый пример такого случая составляет содержание следующего параграфа.



§ 4. АНТАГОНИСТИЧЕСКАЯ ИГРА БЕЗ ИНФОРМАЦИИ. СМЕШАННЫЕ СТРАТЕГИИ

1. Предположим, предприятия занимаются решением той же задачи, что и в предыдущем параграфе, с тем, однако, единственным отличием, что не только «Заря» узнает о продукции «Луча» только после выбора ею своей игрушки, но и «Луч» не может получить, как в задаче из § 3, предварительной информации и вынужден принимать свое решение, не зная о решении «Зари». Таким образом, в этом случае как «Заря», так и «Луч» имеют по одному информационному состоянию. В этом своем единственном информационном состоянии каждое из предприятий имеет две альтернативы: выпускать цветной вариант своей игрушки или серебристый ее вариант. Эти альтернативы и будут стратегиями наших игроков.

Полученная игра является матричной, имеет $2\times 2=4$ ситуации, и матрицей выигрышей в ней, очевидно, будет:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \mathit{ЦР} & \mathit{СР} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathit{ЦП} \\ \mathit{СП} \end{array} & \begin{pmatrix} 40 & 90 \\ 70 & 20 \end{pmatrix} \end{array} \qquad (2)$$

Согласно сказанному выше можно было бы при строках и столбцах не указывать их содержательного смысла. Мы все-таки делаем это здесь для наглядности.

Строки матрицы, как и в предыдущем примере, выбирает игрок 1 — «Заря», а столбцы — игрок 2 — «Луч».

Матрица (2) является, очевидно, частью матрицы (1) (как принято говорить, ее «подматрицей»). Мы видим, что ситуация равновесия предыдущей игры в матрицу (2) не попала, ибо весь второй столбец матрицы (1) в матрицу (2) не вошел. Никакой другой ситуации равновесия здесь не возникло, и максимин в матрице (2), равный 40, отличен от минимакса, который здесь равен 70. Таким образом, максиминный принцип оптимальности здесь оказывается нереализуемым, по крайней мере в той чистой форме, в какой он реализовался в игре из предыдущего параграфа.

2. Получается несколько странное на первый взгляд положение дел, при котором игрок 1 может уверенно получить 40 (максимин), но игрок 2 столь же уверенно не допустить, чтобы он получил более чем 70 (минимакс). Такое положение дел, естественно, порождает у игрока 1 мысли, что он, пожалуй, «исхитрившись», может получить уверенно несколько больше, чем 40 (пусть даже меньше, чем 70). Со своей стороны игрок 2 задумывается о том, как изловчиться и ограничить притязания игрока 1 не числом 70, а меньшим (хотя бы и большим, чем 40). Употребляя лишь те стратегии, которые непосредственно предусмотрены в игре (2), такие хитрости, очевидно, осуществить нельзя. Правила игры не предусматривают также путей увеличения игроками числа их информационных состояний. Какие же возможности остаются у игроков, чтобы расширить область их стратегий?

Одна из возможностей такого рода расширений состоит в том, чтобы разнообразить с п о с о б в ы б о р а своей стратегии. Например, стратегии можно выбрать с л у ч а й н о. Не следует относиться к такой возможности юмористически. «Случайно» не значит «наобум», непродуманно или легкомысленно. Выбрать стратегию случайно — значит заранее вычислить вполне определенные вероятности, с которыми та или иная стратегия будет выбрана, реализовать некоторое случайное испытание, исходы которого имеют эти вероятности и, наконец, принять окончательно решение в соответствии с наблюденной реализацией.

3. Коль скоро мы уже заговорили о вероятностях, остановимся на одном чрезвычайно живучем предрассудке. Понятие вероятности естественно и плодотворно применяется к массовым явлениям, которые происходят сами или поддаются воспроизводству неограниченно большое или хотя бы достаточно большое число раз. При этом вероятность определяется (или, лучше сказать, «оценивается») относительной частотой наступления события в длинной серии испытаний, т. е. отношением числа испытаний, при которых наше событие наступило, к общему числу испытаний. Так, например, можно, подбрасывая монету несколько тысяч раз (такой эксперимент был проделан в начале прошлого века Бюффоном), убедиться в том, что частота (вероятность) выпадения герба близка к $^1/_2$.

Однако отсюда никак не следует, что понятие вероятности и все связанные с ним рассуждения применимы только к массовым явлениям и неприменимы к явлениям единичным, однократным. Действительно, пусть нам предстоит бросить ту же монету ровно один раз. Если эта монета достаточно симметрична (т. е. различие в чеканке на ее лицевой и оборотной сторонах не очень сильно влияет на распределение металла в монете), то до всяких бросаний мы сможем оценить поровну шансы выпадения монеты лицевой и оборотной сторонами. Так как достоверному событию приписывается мера шансов (вероятность) единица, а возможностью того, что упавшая монета останется стоять на ребре, можно пренебречь, вероятность падения монеты на каждую из ее сторон будет действительно равна $^1/_2$. Из тех же соображений симметрии вытекает, что вероятность выпадения игральной кости той или иной гранью при однократном бросании должна быть равна $^1/_6$ и т. д. Как остроумно заметил однажды акад. А. Н. Колмогоров, вряд ли кто-нибудь занимался статистикой выпадения граней правильного додекаэдра (двенадцатигранника); однако едва ли имеются сомнения в том, что относительная частота выпадения каждой из граней додекаэдра при многократном его бросании равна $^1/_{12}$. Следовательно, разумно считать, что вероятность выпадения любой грани додекаэдра при каждом бросании в отдельности также будет равна $^1/_{12}$.

Следующее рассуждение вносит в понятие вероятности «экономическую» черту. Предположим, что два человека играют в орлянку: каждый ставит по пятаку на лицевую или гербовую стороны монеты. Если игроки поставили на различные стороны монеты, то монета подбрасывается, и тот, кто ставил на выпавшую сторону монеты, забирает обе ставки (свою и противника). Такую игру мы можем считать справедливой («безобидной») и мотивировать такое отношение к ней тем, что игрок в ней может с одинаковыми вероятностями выиграть или проиграть пятак (подчеркнем, что вопроса о разумности самого участия в такой игре мы сейчас вообще не касаемся). Это же можно сформулировать и несколько иначе: игрок, уже поставивший на кон пятак, имеет одинаковые (половинные!) шансы получить гривенник или не получить ничего. Такое рассуждение вполне применимо к единичной партии в орлянку и не связано с возможным участием игроков в длинных сериях партий.

Далее мы будем допускать вероятностные рассмотрения однократно осуществляемых явлений.

4. Переменная величина, значения которой зависят от исхода случайного испытания (например, от наступления или ненаступления случайного события), называется *случайной величиной*.

Случайной величиной будет, например, выигрыш игрока 1 в игре (2), если он выбрал первую строку с некоторой вероятностью p, вторую — с вероятностью $1-p$, а игрок 2 выбирает первый столбец (достоверно); этот выигрыш принимает значение 40 с вероятностью p и значение 70 с вероятностью $1-p$. Положение игрока 1 можно при этом уподобить положению участника беспроигрышной лотереи, ожидающего выигрыш 40 с вероятностью p и выигрыш 70 с вероятностью $1-p$. Естественно предположить, что само участие в такой лотерее представляет для игрока 1 некоторую ценность, зависящую от вероятности p и лежащую между 40 и 70. При этом если вероятность p близка к 1, т. е. шансы получить именно 40 весьма велики, то ценность участия в лотерее будет близка к 40, а если близка к нулю, то ценность участия в лотерее близка к 70. Какова именно зависимость ценности участия в лотерее от величины вероятности p — является сложным психологическим (или, если можно так выразиться, «психоэкономическим») вопросом. Мы будем для простоты здесь и далее принимать, что эта зависимость является линейной: ценность описанной лотереи измеряется величиной

$$40p+70(1-p). \tag{3}$$

Мы будем называть эту величину *ожидаемым выигрышем* игрока 1 в рассматриваемых условиях.

Аналогично, если игрок 1 поступает, как выше, а игрок 2 выбирает второй столбец матрицы (2), то ожидаемый выигрыш игрока 1 будет равен

$$90p+20(1-p). \tag{4}$$

Предположим теперь, что игрок 2 по-прежнему выбирает первую строку с вероятностью p, а вторую с вероятностью $1-p$, но игрок 2 так же начал действовать случайным образом и выбирает первый столбец с вероятностью q, а второй с вероятностью $1-q$. При этом предполагается, что вероятность q остается одной и той же, выберет ли игрок 1 свою первую стратегию или вторую. В таких случаях в теории вероятностей (и в теории игр) принято говорить, что выборы игроков являются независимыми.

Такое положение дел можно уподобить участию игрока 1 в сложной лотерее, в которой с вероятностью q он получает билет на право участия в лотерее с ожидаемым выигрышем (3), а с вероятностью $1-q$ — в лотерее с ожидаемым выигрышем (4).

Применяя к полученной сложной лотерее уже проведенные рассуждения, мы можем сказать, что ожидаемый выигрыш игрока 1 в сложной лотерее будет равен
$[40p+70(1-p)]q+[90p+20(1-p)](1-q)$,
или, раскрывая скобки и приводя подобные члены,

$$20+70p+50q-100pq. \qquad (5)$$

5. Будем теперь считать, что мы имеем дело с новой игрой, в которой участвуют те же игроки 1 и 2 (или, если угодно, те же предприятия «Заря» и «Луч»); стратегии игрока 1 состоят в выборе неотрицательного и не превосходящего единицы числа p, являющегося вероятностью выбора им первой строки матрицы; стратегии игрока 2 — в выборе вероятности q взятия им первого столбца, а значение функции выигрыша в ситуации, сложившейся в результате выбора вероятностей p и q, описывается выражением (5). Подчеркнем, что в этой игре каждый игрок имеет бесконечное множество стратегий. Ими будут любые числа между нулем и единицей.

Такие случайные, вероятностные стратегии игрока называются его *смешанными стратегиями*. Заметим, что при $p=1$ или $p=0$ стратегия игрока 1 будет состоять в достоверном выборе им первой или соответственно второй строки матрицы. Таким образом, все старые стратегии входят в число новых, смешанных. Чтобы выделить это несколько особое их положение среди всех смешанных стратегий игрока 1, их обычно называют его *чистыми* стратегиями. Совершенно так же вводятся смешанные стратегии игрока 2 и среди них выделяются его чистые стратегии.

Смешанную стратегию игрока, состоящую в выборе им его первой чистой стратегии с вероятностью t, а второй

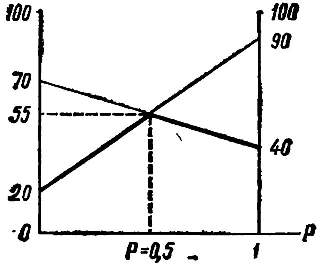


Рис. 1

чистой стратегии с вероятностью $1-t$, принято обозначать в виде пары чисел $(t, 1-t)$.

6. Посмотрим, как обстоит дело с минимаксами выражения (5). Сначала найдем его максимин, т. е. максимальное значение минимального выигрыша игрока 1, которое он надлежащим выбором p может себе обеспечить. Представим для этого (5) в виде

$$20+70p+(50-100p)q. \tag{6}$$

Если $p \leqq 0{,}5$, то коэффициент в (6) при q неотрицателен и, следовательно, игрок 2 для уменьшения выигрыша своего противника может взять наименьшее значение q, т. е. 0. Тогда выигрыш 1 будет равен $20+70p$. Но для максимизации этого выражения игроку 1 будет выгодно взять наибольшее p, допускаемое в этой области, т. е. 0,5. Его выигрыш при этом окажется равным $20+70\times 0{,}5=55$.

Если $p \geqq 0{,}5$, то коэффициент в (6) при q неположителен и игроку 2 будет выгодно взять $q=1$. Выигрыш 1 будет при этом равен $70-30p$, и для игрока 1 будет целесообразно взять наименьшее из p, для которых $p \geqq 0{,}5$, т. е. само число 0,5, получив при этом ожидаемый выигрыш $70-30\times 0{,}5=55$. В обоих случаях максимальные выигрыши игрока оказались равными, чего, впрочем, и следовало ожидать, так как наибольшие значения достигаются здесь при одном и том же значении p, именно при $p=0{,}5$.

Все эти рассуждения можно провести путем графических построений, как это показано на рис. 1.

Итак, мы нашли, что значение максимина равно 55 и достигается он при смешанной стратегии $(^1/_2, {}^1/_2)$ игрока 1.

Займемся теперь нахождением минимакса. Представив для этого (5) в виде $20+50q+(70-100q)p$, заметим, что в случае $q \leqq 0{,}7$ максимум достигается при $p=1$ и равен $20+50q+70-100q=90-50q$, а если $q \geqq 0{,}7$, то максимум достигается при $p=0$ и равен $20+50q$. Поэтому для игрока 2 будет целесообразно взять $q=0{,}7$ (т. е. смешанную стратегию $(^7/_{10}, {}^3/_{10})$), и минимакс окажется равным $20+$ $+50\cdot 0{,}7=55$.

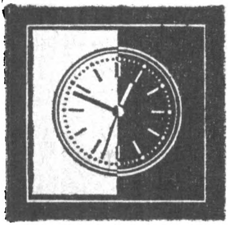
Значит, смешанные стратегии ($^1/_2$, $^1/_2$) игрока 1 и ($^7/_{10}$, $^3/_{10}$) игрока 2 являются их оптимальными стратегиями, или, что то же самое, составляют ситуацию равновесия. Число 55 является значением игры.

В антагонистической игре оптимальная стратегия игрока является как бы стратегией, «пугающей» противника, вынуждающей его действовать также оптимально. Например, если бы в рассматриваемой игре игрок 1 применил бы вместо найденной оптимальной стратегии другую, скажем, стратегию ($^1/_5$, $^4/_5$), то игрок 2 смог бы, выбрав свою вторую чистую стратегию, дать игроку 1 выиграть только $^1/_5 \cdot 90 + ^4/_5 \cdot 20 = 34$, т. е. меньше, чем значение игры.

7. Сформулируем полученный вывод в содержательных терминах. Оптимальной стратегией предприятия «Заря» является выпуск цветных и серебристых птичек с вероятностями 0,5 каждая. Оптимальной стратегией предприятия «Луч» является выпуск цветных рыбок с вероятностью 0,7 и серебристых рыбок с вероятностью 0,3. Ожидаемая реализация игрушек, произведенных «Зарей», составляет 55%, а произведенных предприятием «Луч» — 45%.

Мы видим, что наличие информации о планах «Зари» (случай игры с матрицей (1)) позволяет предприятию «Луч» вместо 45% продукции сбыть 60%. Вопрос о том, дорогая это плата за информацию или нет, уже выходит за рамки данной задачи, равно как и за пределы теории игр вообще.

Следует, наконец, отдать себе отчет в том, что ожидаемый выигрыш игрока не есть его реальный выигрыш и ожидаемая реализация продукции на текущий счет денег непосредственно не приносит. Но если «Заря» будет заведомо гнаться за достоверным выигрышем, т. е. заведомо будет выпускать цветную птичку, то она окажется в условиях игры (1) и должна будет удовольствоваться реализацией только 40% продукции (вместо ожидаемых 55%).



§ 5. ИГРА С ВЫЖИДАНИЕМ

1. Рассмотрим теперь положение дел, как бы объединяющее черты игры с полной информацией, рассмотренной в § 3, и игры без информации из § 4.

Пусть мы находимся в тех же условиях, что и в задаче из § 3, однако представим себе, что в момент принятия решения о выпуске того или иного вида продукции «Луч» может наряду с двумя имеющимися в его распоряжении возможностями — выпускать цветную рыбку или серебристую — осуществить еще третью возможность: выждать, пока не станут ясными производственные планы «Зари», и уже после этого принимать окончательное решение. Ясно, что за такое выжидание предприятие будет расплачиваться опозданием на рынок и потому уменьшением объема сбыта продукции. Примем, что до выхода на рынок опоздавшего «Луча» «Заря» успеет продать 200 шт. игрушек. Поведение же «Зари» пусть остается таким же, как и в предыдущих примерах: принимать решение о выпуске цветной птички или серебристой птички в начальный момент времени, не имея какой-либо информации о намерениях «Луча».

Такую игру удобно описать в виде следующей схемы (рис. 2), представляющей собой некоторый «древовидный граф», дуги которого ориентированы (на рисунке — снизу вверх). Вершины этого графа будут называться *позициями*. Они соответствуют тем «физическим» состояниям, в которых могут находиться игроки. Идущие от позиций вверх дуги графа называются *альтернативами* и соответствуют решениям, которые выбирают игроки в позициях. Позиции, не имеющие альтернатив, называются *окончательными* и соответствуют исходам игры. В окончательных позициях игроки получают выигрыши.

Если несколько позиций на рис. 2 обведены контуром, то это означает, что игрок, принимающий в этих позициях решение, не в состоянии точно указать, в какой именно позиции он находится, т. е. каково его истинное физическое состояние. Он знает лишь, что находится в одной из позиций, обведенных данным контуром. В этом и состоит его «информационное» состояние. Множество позиций, составляющих одно информационное состояние игрока, называется его *информационным множеством*.

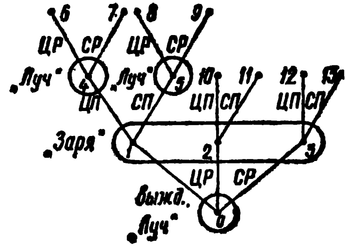


Рис. 2

Игры, представленные в такой форме, называются *позиционными играми*. Позиционные игры описывают конфликты, в которых участники принимают свои решения (т. е. выбирают стратегии) не в результате однократного действия, а шаг за шагом, путем последовательного принятия частичных решений. При этом по ходу дела игрок может приобретать новую информацию о поведении противников и о собственном прошлом поведении, а также утрачивать уже имеющуюся информацию.

Если в позиционной игре складывается некоторая ситуация, т. е. если игроки выбирают в ней свои стратегии, то это значит, что в каждом информационном множестве (а значит, фактически, и в каждой позиции) фиксируется одна из альтернатив. Движение вдоль этих альтернатив от начальной позиции приводит к соответствующей окончательной позиции и тем самым к определенным выигрышам. Мы видим, что в позиционной игре могут быть указаны стратегии игроков и выигрыши в образованных ими ситуациях. Это значит, что каждая позиционная игра может быть представлена в виде игры в нормальной форме.

2. В нашем примере «Луч» имеет три информационных множества, состоящих из одной позиции каждая. Это значит, что «Луч» действует все время в условиях полной информации об обстановке. В позиции 0 он знает, что вообще еще ничего не произошло, а в позициях 4 и 5 он знает, во-первых, о том, что сам выжидал некоторое время, и, во-вторых, о том, какую продукцию выпускает «Заря».

Напротив, «Заря» имеет одно информационное множество, состоящее из трех позиций (1, 2 и 3-я). Это значит, что «Заря» действует в условиях отсутствия информации, не зная в момент принятия своего решения, выжидает ли «Луч» или нет, и если нет, то на какой продукции он остановился. В соответствии со сказанным в п. 2 § 1 стратегией игрока является принятие в каждом информационном состоянии некоторого решения, или, употребляя только что введенную терминологию, — выборе в каждом информационном множестве некоторой альтернативы (очевидно, из всех позиций, принадлежащих одному информационному множеству, должны выходить одни и те же альтернативы). В этом смысле стратегию игрока следует понимать как функцию, заданную на семействе всех его информационных множеств, значением которой на каждом информационном множестве является некоторая альтернатива, выходящая из этого информационного множества.

У «Зари» одно информационное множество с двумя альтернативами. Поэтому это предприятие имеет лишь две стратегии: *СП* и *ЦП*.

«Луч», напротив, имеет три информационных множества, и их альтернативы могут сочетаться друг с другом произвольным образом. Поэтому «Луч» имеет $3\times2\times2=12$ стратегий. Некоторые из них, впрочем, не представляют интереса. Так, стратегия, состоящая в выборе в позиции 0 альтернативы *ЦР*, а в позиции 4 альтернативы *СР*, все равно полностью реализоваться не может, ибо после выбора «Лучом» в позиции 0 альтернативы *ЦР*, игра вообще не может попасть в позицию 4 (равно как и в позицию 5). Поэтому «реально возможных» стратегий у «Луча», как это легко подсчитать, может быть лишь 6, и всего в игре может реализоваться $2\times6=12$ различных ситуаций.

Каждая ситуация ведет к некоторой окончательной позиции. Так, принятие «Лучом» стратегии, состоящей в выборе им в позиции 0 альтернативы выжидания, а в каждой из позиций 4 и 5 — альтернативы *ЦР*, при принятии «Зарей» стратегии *ЦП* приводит к окончательной позиции 6. Полное описание соответствия окончательных позиций ситуациям игры можно свести в следующую таблицу.

Таблица 4

«Луч» / «Заря»	0 — выжд. 4 — *ЦР* 5 — *ЦР*	0 — выжд. 4 — *ЦР* 5 — *ЦР*	0 — выжд. 4 — СР 5 — ЦР	0 — выжд. 4 — *СР* 5 — *СР*	0 — *ЦР*	0 — *СР*
ЦП	6	6	7	7	10	12
СП	8	9	8	9	11	13

Подсчитаем выигрыши (игрока 1, т. е. «Зари»), соответствующие окончательным позициям игры. Например, в позициях 6—9 «Заря» сбывает, во-первых, 20% своей продукции, а затем оставшиеся 80% спроса покрываются совместно с «Лучом» согласно данным табл. 2. Таким образом, общий сбыт «Зари» в позиции 6 будет составлять 20% плюс 40% от оставшихся 80%, т. е. всего 52%. Аналогичный подсчет выигрышей «Зари» для остальных окончательных позиций сведен в табл. 5.

Таблица 5

№ окончат. позиции	6	7	8	9	10	11	12	13
Выигрыш «Зари», в %	52	92	76	36	40	70	90	20

Подстановка в табл. 5 значений выигрышей в соответствующих окончательных позициях дает нам матрицу выигрышей

$$\begin{pmatrix} 52 & 52 & 92 & 92 & 40 & 90 \\ 76 & 36\,\text{А} & 76 & 36 & 70\,\text{Б} & 20 \end{pmatrix}$$

Матричная игра с этой матрицей выигрышей является той игрой в нормальной форме, которая соответствует исходной позиционной игре.

3. Решение полученной игры (т. е. нахождение ее значения и оптимальных стратегий игроков в ней) в принципе не отличается от решения игр из § 3 и 4, особенно от последней. Однако так как здесь приходится иметь дело с игрой, в которой целых шесть стратегий игрока 2, возникают некоторые технические осложнения. Чтобы показать, как можно с ними справиться, мы приведем решение этой игры.

Ввиду различия в матрице выигрышей максимина и минимакса (как легко подсчитать, первый из них равен 40, а второй — 52) мы можем подозревать, что игрокам, в частности «Заре», при этом придется пользоваться смешанными стратегиями. Предположим поэтому, что «Заря» выбирает свою смешанную стратегию, в которой вероятность выбора первой чистой стратегии (т. е. *ЦП*) равна p (такое предположение завести нас в тупик никак не может,

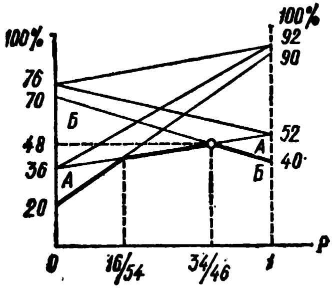


Рис. 3

ибо если в действительности искомая стратегия окажется чистой, то это просто будет означать, что $p=0$ или $p=1$).

Если игрок 2 выберет свою первую чистую стратегию, то ожидаемый выигрыш игрока 1 будет равен $52p+$ $+76(1-p)$, или $76-24p$. Результаты аналогичных подсчетов для каждой из чистых стратегий игрока 2 сведены в табл. 6.

Изобразим графически функциональную зависимость каждого из этих шести ожидаемых выигрышей от p. Они будут отрезками прямых, расположенных, как это показано на рис. 3.

Из этого графика при помощи несложных расчетов можно усмотреть, что при p от 0 до $^{16}/_{54}$ минимальным из всех ожидаемых выигрышей будет соответствующий последнему (шестому) столбцу матрицы, при p от $^{16}/_{54}$ до $^{34}/_{46}$ — второму столбцу и, наконец, при p от $^{34}/_{46}$ до 1 — пятому. Максимальный из этих минимумов будет достигаться при $p = {}^{34}/_{46}$ и будет равен 48. Сравнение с игрой из § 4 показывает, что использование предприятием «Луч» выжидающей тактики позволит увеличить его ожидаемый выигрыш на 7 единиц (напомним, что этими единицами являются в нашем случае проценты реализованной продукции). При этом «Заря» должна будет выбирать выпуск *ЦП* не с половинной, а с существенно большей вероятностью, а именно с вероятностью $^{34}/_{46} \approx 0{,}7$.

4. Нам останется найти оптимальную стратегию «Луча». По самому смыслу принятого нами максиминного определения оптимальности она должна давать игроку 1 минимальный выигрыш, как бы тот ни играл (т. е. как бы тот ни старался этот выигрыш максимизировать). Это равно-

Таблица 6

Чистая стратегия игрока 2	1	2 А	3	4	5 Б	6
Ожидаемый выигрыш игрока I	$76-$ $-24p$	$36+$ $+16p$	$76+$ $+16p$	$36+56p$	$70-30p$	$20+70p$

сильно минимизации ожидаемого выигрыша 1, если тот принимает свою оптимальную стратегию. Но в этом случае реально ограничивают выигрыш 1 лишь отмеченные нами буквами А и Б вторая и пятая стратегии игрока 2 (это видно на рис. 3: отрезки, соответствующие остальным стратегиям 2, проходят выше точки, помеченной кружком). Поэтому принятие игроком 2 любой из своих отличных от А и Б стратегий с положительной вероятностью дает игроку 1 (если он, разумеется, станет придерживаться своей оптимальной стратегии) заведомо больше, чем применение их с нулевой вероятностью. Следовательно, оптимальная стратегия игрока 2, если и является смешанной, то состоит в «смешении» только стратегий А и Б.

Вычислим вероятности, с которыми игрок 2 смешивает свои стратегии А и Б. Обозначим через p вероятность, с которой игрок 2 выбирает стратегию А (тогда $1-p$ будет вероятностью, с которой он выбирает стратегию Б). «Ожидание ожидаемого выигрыша» игрока 1 при этом будет равно $(36 + 16p)q + (70 - 30p)(1 - q)$, т. е. $70 - 34q + (-30 + 46q)p$.

Минимакс этого последнего выражения вычисляется так же, как и в п. 6 § 4. Он, как и следовало ожидать, равен 52% и достигается при $q = {}^{30}/_{46}$. Таким образом, «Луч» должен выжидать с вероятностью, приблизительно равной $^{2}/_{3}$, после чего действовать сообразно обстоятельствам. Подчеркнем, что найденная вероятность получилась в результате учета 20%-ных потерь сбыта от задержки выпуска продукции. Ясно, что если бы эти потери по сделанному нами в условиях задачи предположению оказались бы бо̀льшими, то оптимальная вероятность задержки оказалась бы меньшей, и наоборот.

$$\begin{pmatrix} 400 & 900 \\ 700 & 600 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 600 & 100 \\ 300 & 900 \end{pmatrix}$$

§ 6. НЕАНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ (БИМАТРИЧНЫЕ) ИГРЫ

1. Предположим теперь, что производственные условия выпуска елочных игрушек на предприятиях «Заря» и «Луч» те же, что и в предыдущих задачах (см. § 3), но конъюнктура на рынке изменилась и возможности их сбыта возросли следующим образом. Как предсказывают социологи, у юных покупателей можно ожидать склонности приобретать серебристые игрушки комплектами, состоящими из птички и рыбки. Можно предполагать, что из тысячи рассматриваемых нами покупателей в случае появления на рынке серебристой рыбки и серебристой птички 50% приобретут обе эти игрушки, а остальной спрос распределится, как это следует из табл. 2: будет продано 400 рыбок и 100 птичек. Склонности к приобретению комплектов цветных игрушек социологи, однако, не обнаружили.

Такое положение дел также описывается игрой тех же двух игроков с теми же двумя стратегиями у каждого, что и в игре из § 4. Однако эта игра уже не будет антагонистической: от выпуска серебристых игрушек выигрывают оба предприятия. Например, в ситуации (*СП*, *СР*) серебристых птичек всего будет продано 600 шт., а серебристых рыбок — 900 шт.

Общая сумма продаваемой продукции будет зависеть теперь от складывающейся ситуации. Поэтому мы будем измерять выигрыши игроков в этой игре не в процентах, а абсолютно, в штуках. Выигрыши игрока 1 («Зари») могут быть описаны следующей матрицей

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} ЦР & СР \end{array} \\ \begin{array}{c} ЦП \\ СП \end{array} & \begin{pmatrix} 400 & 900 \\ 700 & 600 \end{pmatrix} \end{array} \tag{7}$$

(«окаймление» матрицы приводится единственно для напоминания).

Поскольку игра не является антагонистической и сумма выигрышей в каждой ситуации не одна и та же, задание матрицы выигрышей игрока 1 еще не определяет матрицы выигрышей игрока 2. Последняя имеет в нашем случае вид

$$\begin{pmatrix} 600 & 100 \\ 300 & 900 \end{pmatrix}$$

Ввиду того что выигрыши в неантагонистических играх двух игроков с конечным числом стратегий у каждого описываются парами матриц, такие игры принято называть *биматричными*.

2. Нахождение для «Зари» в условиях использования смешанных стратегий максиминной стратегии, ориентирующейся лишь на собственный выигрыш, описываемый матрицей (7), выполняется, как и в примере из предыдущего параграфа. Соответствующие расчеты показывают, что игрок 1 должен при этом выбирать свои строки матрицы с вероятностями $(^1/_6, {}^5/_6)$; при этом он должен опасаться смешанной стратегии $(^1/_2, {}^1/_2)$ игрока 2. Но, с другой стороны, из матрицы (8) следует, что максиминной смешанной стратегией игрока 2 является $(^8/_{11}, {}^3/_{11})$ (а вовсе не пугающая игрока 1 стратегия $(^1/_2, {}^1/_2)$), причем, сам он должен опасаться стратегии $(^6/_{11}, {}^5/_{11})$ игрока 1 (а не той играемой им стратегии $(^1/_6, {}^5/_6)$, которую в силу проведенных рассуждений склонен применять игрок 1).

Таким образом, в случае неантагонистической игры использование игроками в качестве оптимальных их максиминных стратегий теряет свою убедительность. Однако другая черта оптимальных стратегий антагонистических игр, именно их равновесность (см. п. 3 § 3), оказывается более глубокой и «выдерживает» обобщение и на неантагонистические и в том числе на биматричные игры.

3. Найдем ситуации равновесия в нашем случае.

Прежде всего непосредственной проверкой без труда убеждаемся в том, что ситуаций равновесия, в которых оба игрока имеют чистые стратегии, в рассматриваемой игре нет. Например, от ситуации, состоящей в выборе игроками своих первых чистых стратегий (соответствующие выигрыши расположены в левом верхнем углу матриц), выгодно отклониться игроку 1. Аналогично проверяется неравновесность остальных трех ситуаций в чистых стратегиях.

Значит, в ситуациях равновесия рассматриваемой игры хотя бы один игрок имеет смешанную стратегию, не являющуюся чистой, т. е. в которой вероятности обеих чистых стратегий отличны от нуля (такие смешанные стратегии принято называть *вполне смешанными*). Пусть для определенности это будет игрок 1, а его равновесная стратегия есть $(p, 1-p)$, где $0 < p < 1$. Подчеркнем, что число p нам пока неизвестно. Равновесной стратегией игрока 2 пусть является $(q, 1-q)$; вообще говоря, она может быть и чистой, т. е. $0 \leqslant q \leqslant 1$.

Тогда ожидаемый выигрыш игрока 1 в ситуации, образованной этими двумя стратегиями, равен $400\,pq + 900p\,(1-q) + 700\,(1-p)\,q + 600\,(1-p)\,(1-q)$.

Обозначим этот выигрыш через $H\,(p, q)$. После упрощений мы получаем $H\,(p, q) = 600 + 300p + 100q - 600pq$.

По определению ситуации равновесия, если игрок 1 изменит свою стратегию $(p, 1-p)$ на какую-либо иную, то его выигрыш может разве лишь уменьшиться. В частности, такое неувеличение будет иметь место, если он заменит стратегию $(p, 1-p)$ на свою первую или вторую чистые стратегии, т. е. на стратегии, в которых $p = 1$ или $p = 0$. Это значит, что

$$H(p, q) \geqq H(1, q) = 900 - 500q, \tag{9}$$

$$H(p, q) \geqq H(0, q) = 600 + 100q. \tag{10}$$

Умножим неравенство (9) почленно на положительное число p, неравенство (10) — на положительное $1-p$ и сложим полученные неравенства. Мы получим $H(p, q) \times \times [p + (1-p)] \geqq (900 - 500q)p + (600 + 100q) \times \times (1-p) = 600 + 300p + 100q - 600pq = H(p, q)$, т. е. фактически точное равенство. Но точное равенство может получиться в результате сложения двух неравенств одинакового смысла только в том случае, когда оба они суть равенства. Далее, складываемые равенства отличаются от соотношений (9) и (10) только положительными множителями p и $1-p$. Следовательно, и эти соотношения должны быть равенствами, а так как две величины, порознь равные третьей, равны между собой, мы получаем $900 - 500q = 600 + 100q$, откуда $q = 1/2$. Значит, равновесная стратегия игрока 2 должна быть также вполне смешанной, именно $(1/2, 1/2)$.

Для нахождения числа p обратимся к выигрышу игрока 2 в ситуации равновесия. Он равен $600pq + 100p(1-q) + 300(1-p)q + 900(1-p)(1-q)$.

Преобразование этого выражения и сравнение его с выигрышем игрока 2 при выборе этим игроком его чистых стратегий дает нам подобно предыдущему, что $p = 6/11$. Значит, равновесной стратегией игрока 1 оказывается $(6/11, 5/11)$, что согласуется со сделанным нами предположением о ее смешанности.

Таким образом, рассматриваемая игра имеет ровно одну ситуацию равновесия, которая состоит из стратегии $(6/11, 5/11)$ игрока 1 и стратегии $(1/2, 1/2)$ игрока 2. То обстоятельство, что эти стратегии совпадают с некоторыми стратегиями, упомянутыми в п. 2, имеет под собой некоторые основания. Однако этот вопрос довольно сложный, и мы в него вдаваться не будем.

Как легко подсчитать по формулам (9) и (10), ожидаемые выигрыши игроков 1 и 2 в этой ситуации равновесия соответственно равны 650 и 464.

4. Сформулируем полученные выводы в содержательных терминах. В условиях рассматриваемой неантагонистической игры для предприятия «Заря» представляется разумным выпуск цветных птичек с вероятностью $^6/_{11}$, а серебристых птичек — с вероятностью $^5/_{11}$; для предприятия «Луч» целесообразно производство цветных рыбок и серебристых рыбок с одинаковыми вероятностями. Ожидаемая реализация продукции составляет для «Зари» 650 шт., а для «Луча» — 464 шт. Общее ожидаемое число реализованных игрушек составит 1114 шт.

5. Найденный исход конфликта является единственным оптимальным с точки зрения равновесности исходом. Однако рассматриваемый нами сейчас вариант игры является неантагонистическим и потому некоторые ситуации могут оказаться более выгодными для обоих игроков, чем другие и, в частности, чем только что найденная ситуация равновесия.

Как легко проверить, самой выгодной ситуацией в нашей игре является та, в которой оба игрока применяют свои вторые чистые стратегии. В ней суммарный выигрыш игроков равен 1500, и представляется целесообразным, чтобы игроки договорились играть именно эти свои стратегии.

Но здесь возникают сразу две новые проблемы.

Во-первых, получение игроком 1 выигрыша 600, а игроком 2 выигрыша 900, причитающихся им в наиболее выгодной ситуации, может встретить несогласие игрока 1, который, играя свою равновесную стратегию, мог бы получить 650. Он с полным основанием будет считать, что договор, условием которого является выбор игроками вторых стратегий, выгоден лишь для игрока 2 и невыгоден для него самого.

Кроме того, так как в этом договоре зафиксирована неравновесная ситуация, для одной из договаривающихся сторон будет выгодно его нарушить. В данном случае нарушение будет выгодно для «обиженного» игрока 1. Он может в последний момент отклониться от условий договора и выбрать свою первую чистую стратегию. В результате он резко увеличит свой выигрыш (до 900), оставляя противнику лишь 100. Следовательно, надо сделать как-то так, чтобы игрок 1 был заинтересован в соблюдении условий договора.

Но, соблюдая договор, обязывающий его выпускать серебристую птичку, игрок 1 сможет согласно правилам игры (т. е. в рассматриваемой нами интерпретации — непосредственно от продажи игрушек) получить лишь 600. Поэтому его заинтересованность в ситуации может быть удовлетворена лишь за счет игрока 2, получающего весьма много, 900. Значит, в договор следует включить пункт о компенсации игроком 2 игроку 1 убытков от соблюдения договора. Чтобы не вызывать здесь возможных юридических возражений по поводу такого рода компенсаций, подчеркнем, что выигрыши игроков мы можем измерять не в деньгах, а в весьма широко понимаемых «единицах полезности».

На этом месте, однако, мы сталкиваемся со второй проблемой. Какую по величине компенсацию со стороны игрока 2 игроку 1 можно здесь считать «справедливой»?

Игрок 2 готов уже предложить разделить весь суммарный выигрыш 1500 пополам, т. е. так, чтобы каждый из участников игры получил по 750. Игрок 1, однако, не согласен и на это, мотивируя свое несогласие тем, что сам переход от антагонистической игры (из § 4) к неантагонистической игре, рассматриваемой нами сейчас, связан с увеличением выигрыша игрока 1 на 400 единиц, а игрока 2 лишь на 100. Поэтому игрок 1 считает себя вправе претендовать на долю, бо̀льшую, чем половина от суммарного выигрыша. Он может развивать следующее представление о справедливости в данных условиях. Свой выигрыш в единственной ситуации равновесия каждый игрок может обеспечить себе, действуя в одиночку. Поэтому дележ общего выигрыша следует начать с выдачи этих равновесных выигрышей игрокам. По отношению же к оставшейся сумме игроки находятся в одинаковом положении; поэтому ее следует разделить между ними пополам. В результате, как легко подсчитать, игрок 1 должен получить 843, а игрок 2 — 657.

Такие соображения оказываются весьма основательными и могут получить дальнейшее глубокое обоснование, которым мы, однако, здесь заниматься не будем.

§ 7. ИГРА С ТРЕМЯ ИГРОКАМИ. СПРАВЕДЛИВЫЕ ДЕЛЕЖИ

1. Предположим теперь, что после заключения описанного в предыдущем параграфе соглашения между предприятиями «Заря» и «Луч» было принято решение о разделении «Зари», на базе которой в городке создаются два предприятия: «Заря» и «Утро». В ходе разделения оборудования поделенными оказались и штампы для изготовления елочной птички [1]. Кроме того, мы (уже единственно для упрощения предстоящих рассмотрений, которые и без того окажутся достаточно сложными) предположим, что цветные игрушки вовсе не будут пользоваться спросом, а серебристые — покупаться только комплектами: одна рыбка и одна птичка, причем прогнозируется спрос на 1000 таких комплектов [2]. «Луч» может выпустить всю нужную тысячу рыбок. Пусть «Заря» в состоянии на имеющемся у нее оборудовании произвести до $N_з$ птичек, а «Утро» — до $N_у$ птичек, причем $500 < N_з,\ N_у \leq 1000$.

Мы можем считать, что имеем здесь дело с некоторой игрой, которую опишем в несколько упрощенной, «нестратегической» форме (описанные в такой форме игры обычно называются *кооперативными*).

Участниками игры (игроками) являются те же предприятия: «Луч», «Заря» и «Утро».

Посмотрим, какой выигрыш может получить та или иная группа игроков (в теории игр такие группы называются *коалициями*) после объединения своих возможностей. Мы будем измерять этот выигрыш числом выпускаемых коалицией комплектов.

Ни один из игроков, действуя в одиночку, не в состоянии произвести ни одного комплекта игрушек. Поэтому

---

[1] Автор понимает, что заставил своих героев совершить глупость и испытывает угрызения совести, тем более что на ближайших страницах эта глупость будет экономически наказана.

[2] Читателю должно быть ясно, что мы теперь окончательно порываем с предположениями о предпочтениях, описанных в табл. 1 и 2, и переходим к рассмотрению совершенно другой экономической задачи.

он не может получить никакого выигрыша. Не может также произвести ни одного комплекта игрушек и потому не может обеспечить себе какой-либо выигрыш коалиция из «Зари» и «Утра». Напротив, коалиция из «Луча» и «Зари» может выпустить $N_з$ комплектов игрушек, т. е. выиграть $2N_з$; аналогично коалиция из «Луча» и «Утра» выигрывает $2N_у$, а коалиция из всех трех предприятий выигрывает 2000. Так, описанную игру обозначим буквой Г [1].

Ясно, что каждое предприятие заинтересовано в сбыте возможно большего количества продукции. Ясно также, что для «Луча» со всех точек зрения будет разумно фактически произвести тысячу рыбок и договориться с «Утром» и «Зарей» о поставке ими требуемой для составления комплектов тысячи птичек. Общие возможности «Утра» и «Зари» превосходят число требуемых птичек. Поэтому удовлетворить полностью интересы обоих предприятий, заказав у «Зари» $N_з$, а у «Утра» $N_у$ птичек, не представляется возможным. Возникает естественный вопрос, какие объемы, какие «квоты» продукции следует в игре Г считать для этих предприятий справедливыми.

2. Понятие справедливости принадлежит к числу весьма сложных и вместе с тем достаточно «первичных» понятий, которые трудно поддаются наглядному сведению к более простым. Поэтому математизацию этого понятия (подобно математизации многих других фундаментальных понятий) естественно совершать *аксиоматическим* путем. Это значит, что надо фиксировать некоторые черты, которые можно считать присущими справедливости, придать этим чертам характер аксиом и на их основе вывести дальнейшие свойства конкретных реализаций справедливости в том или ином конфликте и, в частности, расчетные формулы, позволяющие находить справедливые доли игроков в соответствующих играх. Разумеется, всякой попытке применить такое понимание справедливости должно предшествовать обретение разумной уверенности в соблюдении в этом случае положенных в основу аксиом.

Системы аксиом, определяющих справедливость в кооперативной игре, можно составлять различным образом.

---

[1] Буква Г (называемая в греческом алфавите «гамма») часто с теми или иными значками при ней является традиционным (но, конечно, ни в коем случае не обязательным) обозначением для различных игр. Эта традиция связана с тем, что игра по-английски называется (*game*).

Одним из наиболее удобных вариантов является следующий.

Аксиома 1. Предположим, что некоторая коалиция может вполне уверенно выиграть некоторую сумму; при этом включение в коалицию новых членов не увеличит этого выигрыша, а выбытие из нее любого члена «обессиливает» коалицию так, что оставшиеся игроки уже не могут добиться ничего (такие игры в теории игр называются *простейшими*). В этом случае будем считать справедливым, чтобы при дележе общего выигрыша члены рассматриваемой («минимальной выигрывающей») коалиции получили равные доли полученного выигрыша, а не вошедшие в минимальную выигрывающую коалицию члены не получили бы ничего.

Аксиома 2. Предположим, что некоторый игрок участвует в играх Γ_1, Γ_2 ... , и его справедливая доля в каждой из них равна соответственно g_1, g_2, ... Рассмотрим новую игру Γ, состоящую в проведении a_1 партий игры Γ_1, a_2 партий игры Γ_2 и т. д. Тогда справедливой долей игрока в игре Γ будем считать: $a_1g_1 + a_2g_2 + \ldots$

Эту аксиому мы будем трактовать достаточно широко, допуская в ней в качестве «кратностей» a_1, a_2 ... партий отрицательные и даже дробные числа. Проще всего интерпретировать эти числа как коэффициенты, с которыми начисляются выигрыши в обычных (однократных) партиях.

3. Применим сформированное представление о справедливости к описанной в п. 1 игре. Рассмотрим для этого следующие простейшие игры:

$\Gamma_з$, в которой «Заря» выпускает $N_з$ птичек, «Луч» выпускает достаточное для составления комплектов количество рыбок, а «Утро» не выпускает ничего;

$\Gamma_у$, в которой «Утро» выпускает $N_у$ птичек, «Луч» попрежнему выпускает достаточное количество рыбок, а «Заря» не выпускает ничего;

$\Gamma_{общ}$, которая с точки зрения повседневного представления о производстве выглядит несколько странно; поскольку в ней все три предприятия работают по производству игрушек на полную мощность — «Луч» выпускает тысячу рыбок, «Заря» и «Утро» — соответственно $N_з$ и $N_у$ птичек, но итогом и основным показателем производства считается избыток числа птичек над числом рыбок, т. е. $N_з + N_у - 1000$ (формально же $\Gamma_{общ}$ — игра как игра, и возразить против нее нечего).

Все эти игры являются простейшими, причем выигрывающую коалицию в $Г_з$ составляют «Заря» и «Луч», в $Г_у$ — «Утро» и «Луч», а в $Г_{общ}$ — «Заря», «Утро» и «Луч». Образуем из этих трех простейших игр новую игру $Г^*$, состоящую в том, что игра $Г_з$ играется 2 раза, игра $Г_у$ — тоже 2 раза, а игра $Г_{общ}$ — (—2) раза. Описание выигрышей коалиций в этих играх сведено в табл. 7.

Таблица 7

Коалиция \ Игра	$Г_з$	$Г_у$	$Г_{общ}$	$Г$
Один «Луч»	0	0	0	0
Одна «Заря»	0	0	0	0
Одно «Утро»	0	0	0	0
«Заря» и «Утро»	0	0	0	0
«Заря» и «Луч»	$2\ N_з$	0	0	$2\ N_з$
«Утро» и «Луч»	0	$2\ N_у$	0	$2\ N_у$
«Заря», «Утро» и «Луч»	$2\ N_з$	$2\ N_у$	$N_з+N_у-1000$	2000

Из последнего столбца этой таблицы видно, что новая игра $Г^*$ фактически совпадает с исследуемой нами игрой $Г$: любой игрок, равно как и любая коалиция игроков, получает в ней столько же, сколько в игре $Г$. Поэтому и справедливые доли игроков в ней будут как раз те, которые мы ищем. Но справедливые доли игроков в играх $Г_з$, $Г_у$

Таблица 8

Игрок \ Игра	$Г_з$	$Г_у$	$Г_{общ}$	$Г^*$
«Луч»	$N_з$	$N_у$	$\frac{1}{3}(N_з+$ $+N_у-1000)$	$\frac{1}{3}(N_з+$ $+N_у+2000)$
«Заря»	$N_з$	0	$\frac{1}{3}(N_з+$ $+N_у-1000)$	$\frac{1}{3}(N_з-$ $-2N_у+2000)$
«Утро»	0	$N_у$	$\frac{1}{3}(N_з+$ $+N_у-1000)$	$\frac{1}{3}(-2N_з+$ $+N_у+2000)$

и $\Gamma_{общ}$ находятся на основании аксиомы 1, а в игре Γ^* — на основании аксиомы 2. Результаты этих подсчетов приведены в табл. 8.

4. Приняв аксиомы справедливости из п. 2, мы тем самым должны принять и все выводы из них и в том числе признать справедливыми доли предприятий, приведенные в последнем столбце этой таблицы. Однако приходится сознаться, что эти результаты выглядят несколько неожиданно.

В самом деле, если, например, производственные мощности «Зари» и «Утра» одинаковы, т. е. если $N_з = N_у = N$, то их справедливые доли будут равны $\frac{1}{3}(2000 - N)$ каждая. Мы видим, что эти доли с ростом N убывают и, как это ни странно, чем более мощными хозяйственно будут «Заря» и «Утро», тем на меньшую долю они могут рассчитывать при справедливом дележе. Например, при N, близком к 500, каждая доля равна $\frac{1}{3}(2000 - 500) = 500$, а при $N = 1000$ она уменьшается до $\frac{1}{3}(2000 - 1000) = 333$. Доля же «Луча» в этом дележе возрастает с 500 до 667.

Близким к этому явлению оказываются здесь возникающие для хозяйственников соблазны не вполне этичных поступков, на которые следует обратить внимание.

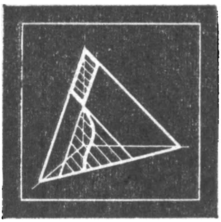
Предположим, например, что «Заря» располагает на самом деле производственными возможностями $N_з^{ист} = 900$, а возможности «Утра» будут $N_у = 700$. Тогда справедливой долей «Зари» будет $\frac{1}{3}(2000 + 900 - 2 \cdot 700) = 500$, а «Утра» $\frac{1}{3}(2000 - 2 \cdot 900 + 700) = 300$.

Наконец, справедливой долей «Луча» оказывается $\frac{1}{3}(2000 + 900 + 700) = 1200$.

Допустим теперь, что «Заря» утаит часть своих производственных резервов и заявит лишь о наличии кажущихся возможностей $N_з^{каж} = 600$. Тогда справедливые доли предприятий изменятся и станут равными для «Зари» $\frac{1}{3}(2000 + 600 - 2 \cdot 700) = 400$ и для «Утра» $\frac{1}{3}(2000 - 2 \cdot 600 + 700) = 500$.

Мы видим, что такие действия «Зари», хотя и принесут ей ущерб, но зато доставят вдвое больший выигрыш «Утру», из которого «Заря» может выговорить себе солидную компенсацию. Ясно при этом, что такое увеличение суммарного выигрыша «Зари» и «Утра» произойдет за счет «Луча».

Из сказанного вытекает, что справедливость нужно не только уметь описать и найти, но и охранять.



§ 8. ИГРА С ТРЕМЯ ИГРОКАМИ. УСТОЙЧИВОСТЬ

1. Продолжим рассмотрение игры из предыдущего параграфа для случая $N_з = 900$ и $N_у = 700$. Как было выяснено, справедливая доля для «Зари» в этом случае равна 500, для «Утра» — 300 и поэтому для «Луча» — 1200. Допустим, что «Луч» берет на себя составление комплектов игрушек, вступает в кооперацию с «Зарей» и заказывает этому предприятию все те 900 птичек, которые оно в состоянии поставить. Предположим, что за эту выгодную для «Зари» комбинацию «Луч» запрашивает с нее 175. В итоге «Луч» получает

900 (от реализации игрушек) + 175 (от «Зари») = 1075,

а «Заря» —

900 (от реализации игрушек) — 175 («Лучу») = 725.

Мы видим, что «Луч» и «Заря», не выходя за пределы своих производственных возможностей, увеличили свои выигрыши по сравнению со справедливыми долями. Ясно, конечно, что это произошло за счет «Утра», но для нас важно не это, а то, что увеличение выигрышей «Зари» и «Луча» происходит не в результате прямого использования ресурсов «Утра», а за счет его частичного отстранения от сделки. Таким образом, справедливые дележи в рассматриваемой игре не являются устойчивыми. Займемся поисками устойчивых дележей (которые, к сожалению, уже не будут справедливыми).

2. Обозначим через $d_з$, $d_у$ и $d_л$ доли, которые в некотором дележе получат соответственно «Заря», «Утро» и «Луч».

Из условий игры следует, что «Луч» может заказать «Заре» $N_з$ птичек. От реализации комплектов с этими птичками обе стороны получат по $N_з$. Если $2N_з$ будет больше, чем $d_л + d_з$, то предприятия «Луч» и «Заря» смогут разделить $2N_з$ так, чтобы «Луч» получил больше, чем $d_л$, а «Заря» больше, чем $d_з$. Таким образом, в этом случае для «Луча» и «Зари», во-первых, выгодно выступить

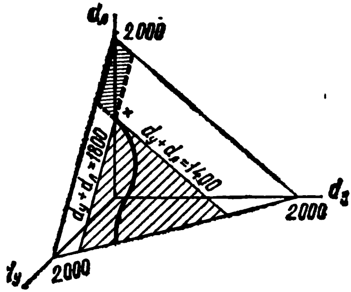


Рис. 4

против дележа, в котором они получат доли $d_л$ и $d_з$, а, во-вторых, они имеют технико-экономические возможности это сделать: им достаточно вступить между собой в соглашение и получить $2N_з$. Следовательно, дележ с долями $d_з$ и $d_л$ не будет устойчивым.

Из сказанного видно, что для устойчивости дележа необходимо, чтобы было: $d_л + d_з \geqq 2N_з$. (11)

Другим необходимым условием является такое же неравенство, касающееся долей «Луча» и «Утра»:
$d_л + d_у \geqq 2N_у$. (12)

Ясно, что если эти условия выполнены, то дележ будет устойчивым, ибо третья комбинация предприятий, состоящая из «Зари» и «Утра», не в состоянии выпустить ни одного комплекта игрушек, и их объединение против «Луча» ничего им дать не сможет (поэтому такого объединения и не возникнет).

3. Для более наглядного описания дележей, удовлетворяющих неравенствам (11) и (12), удобно прибегнуть к геометрической иллюстрации. Будем откладывать доли предприятий по трем осям координат (рис. 4). Поскольку для любого дележа

$$d_л + d_з + d_у = 2000, \tag{13}$$

и числа $d_л$, $d_з$ и $d_у$ неотрицательны, каждому дележу будет соответствовать некоторая точка большого треугольника, и наоборот.

Устойчивые дележи, т. е. дележи, удовлетворяющие неравенствам (11) и (12), соответствуют точкам густо заштрихованного параллелограмма. В теории игр это множество устойчивых дележей называется ядром, или, точнее, *с*-ядром[1]. На рис. 4 прямые в треугольнике проведены так, что $N_з = 900$, $N_у = 700$. Крестиком помечена точка, соответствующая справедливому дележу.

4. Сделаем по поводу устойчивых дележей три замечания.

Чем больше числа $N_з$ и $N_у$ (т. е. чем ближе каждое из них к 1000), тем меньше в соответствующем направлении станет заштрихованный параллелограмм устойчивых дележей. Это обстоятельство может выглядеть неожиданным в том же смысле, что и аналогичный факт, отмеченный в связи со справедливым дележом (рост производственных возможностей «Зари» и «Утра»), уменьшает их доли в устойчивых дележах.

Далее, *c*-ядро состоит из большого (даже бесконечного) числа дележей. Поэтому выбор из них «самого устойчивого», «самого оптимального» представляет собой дальнейшую задачу, которой мы здесь заниматься не будем.

c-ядро, очевидно, обладает внутренней устойчивостью (см. п. 4 § 2): ни от одного дележа из *c*-ядра мы не можем перейти к более предпочтительному. Внешней устойчивостью *c*-ядро, однако, не обладает: существуют дележи, не принадлежащие *c*-ядру, вполне конкурентоспособные с дележами из *c*-ядра, т. е. такие, что переходы от них к каким-либо дележам из *c*-ядра не сопровождаются увеличением доли «Луча» и хотя бы одного предприятия, производящего птички. Такие дележи составляют редко заштрихованный треугольник.

Чтобы дополнить *c*-ядро до внешне устойчивого множества, т. е. превратить его в Н-М-решение (см. п. 4 § 2), можно присоединить к нему «хвост» наподобие изображенного на рис. 4, идущий в пределах редко заштрихованного треугольника и отклоняющийся по своему направлению в каждой своей точке от высоты треугольника не более чем на 30°. Такой «хвост» можно присоединить к *c*-ядру, очевидно, чрезвычайно большим числом способов. Поэтому не только каждое Н-М-решение состоит из большого числа дележей, но и самих Н-М-решений в игре может быть очень много.

Наконец, бывают игры, где нет устойчивых дележей вовсе. В качестве примера рассмотрим игру, в которой, как и выше, $N_з = 900$, $N_у = 700$, но, кроме того, предприятия «Заря» и «Утро» способны, не прибегая к постав-

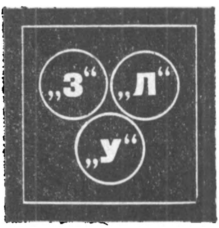
---

[1] По начальной букве английского слова *core* (ядро).

кам рыбок со стороны «Луча», выпустить, скажем, за счет использования малоэффективного оборудования и технологии 500 комплектов игрушек.

В такой игре ни один дележ не будет устойчивым, т. е. не будет входить в c-ядро. В самом деле, условиями устойчивости являются неравенства (11) и (12), которые здесь приобретают вид $d_л + d_з = 1800$, $d_л + d_у = 1400$, да еще аналогичное неравенство, касающееся долей «Зари» и «Утра»: $d_з + d_у = 1000$ (ибо по сделанному только что предположению 500 комплектов игрушек они могут изготовить и без участия «Луча»). Складывая эти три неравенства почленно, мы получаем $2(d_л + d_з + d_у) \geqq 4200$, чего, однако, быть не может, так как согласно (13) левая часть здесь равна 4000.

Мы видим, что принцип оптимальности, состоящий в устойчивости дележей, может в некоторых играх оказываться нереализуемым.



§ 9. ОДНА ЗАДАЧА, КАСАЮЩАЯСЯ РЕКЛАМЫ

1. Игры в нормальной форме с тремя и более игроками требуют более сложного анализа, чем игры с двумя игроками.

Рассмотрим следующую задачу, с которой могут встретиться наши три предприятия: «Заря», «Луч» и «Утро». Предположим, что каждое из них выпускает по одному виду некоторой однотипной продукции (например, тех же елочных игрушек), идущей под девизом: «лучший подарок к празднику». Среди других способов рекламы этой продукции фирменные магазины наших предприятий могут воспользоваться, скажем, рекламой по городскому телевидению либо вечером накануне последнего перед праздником рабочего дня магазина, либо утром в самый этот день. Далее мы будем касаться лишь эффективности этих видов рекламы и притом применительно к контингенту тех покупателей, которые смотрят вечерние телепередачи в среднем вдвое чаще, чем утренние, и, кроме того, понимают слова «лучший подарок» настолько буквально, что, услышав одновременно о двух «лучших подарках», не склонятся к покупке ни одного из них.

Таким образом, с одной стороны, каждое предприятие заинтересовано в вечерней рекламе (ибо она по сравнению с утренней завербует большее число покупателей), а с другой — в том, чтобы не участвовать одновременно с другим предприятием в какой-либо из передач (ибо тогда оба одновременно участвующие в рекламе предприятия только дезориентируют покупателей, и реклама останется без ответа). Обратим внимание на то, что здесь для каждого предприятия в отдельности имеется объективно наилучший способ действий: участвовать в вечерней передаче. Однако как только этот способ действий избирает более чем одно предприятие, он уже становится бесполезным.

Подчеркнем здесь еще раз, что мы во всей этой книжке имеем дело с некоторыми задачами, и то, что не предусмотрено в условиях задачи, не должно использоваться и в ее решении. В частности, условия задачи не предусматривают какой-либо договоренности с рекламным отделом телевидения и получения от него информации об уже поступивших заказах на рекламу. Равным образом мы имеем в виду вполне определенных покупателей выпускаемого товара [1].

2. Формализуем поставленную задачу, представив ее как игру в нормальной форме.

Участниками игры (игроками) являются здесь предприятия, которые мы для удобства обозначим через 1, 2 и 3. Напротив, ни покупатели, ни телевидение, хотя их интересы прямо или косвенно и отражены в условиях данной задачи, действуют в условиях задачи вполне определенным образом и поэтому игроками считаться не могут.

Каждый игрок имеет здесь две стратегии: участвовать в утренней рекламной передаче (стратегия 1) и в вечерней (стратегия 2). Поэтому в игре имеется $2 \times 2 \times 2 = 8$ ситуаций. На основании имеющегося опыта мы уже можем предвидеть, что в данной игре придется рассматривать также смешанные стратегии игроков и составлять из них ситуации. Введем эти понятия уже сейчас, до того как в этом возникла непосредственная необходимость.

Смешанная стратегия каждого игрока состоит в случайном выборе его стратегий 1 или 2. Обозначим через p_i

---

[1] См. еще раз подстрочное примечание на стр. 8.

вероятность выбора игроком 1 его первой чистой стратегии. Очевидно, p_1 может принимать любое значение от 0 до 1. При этом $p_1 = 1$ соответствует случаю, когда игрок 1 выбирает свою первую чистую стратегию с вероятностью 1, а $p_0 = 0$ — случаю, когда он выбирает первую чистую стратегию с вероятностью 0 (т. е. на самом деле выбирает вторую чистую стратегию).

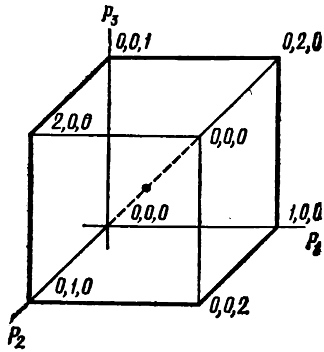


Рис. 5

Аналогично через p_2 обозначим вероятность выбора первой чистой стратегии игроком 2, а через p_3 — вероятность выбора первой стратегии игроком 3.

Ситуациями в смешанных стратегиях будут всевозможные комбинации смешанных стратегий игроков, т. е. тройки вида

$$(p_1, p_2, p_3), \text{ где } 0 \leqq p_1, p_2, p_3 \leqq 1. \qquad (14)$$

Ясно, что ситуациям в чистых стратегиях соответствуют тройки, состоящие из нулей и единиц, и только они.

Как известно, множество всех троек вида (14) естественно описать как «единичный» куб в системе координат p_1, p_2, p_3 (рис. 5). В этом описании ситуации в чистых стратегиях соответствуют вершинам куба.

Перейдем к выигрышам игроков. В ситуациях в чистых стратегиях (описываемых, как говорилось, тройками из нулей и единиц) только тот игрок получит какой-либо положительный выигрыш, чья компонента тройки отличается от всех остальных. При этом если его компонента оказывается равной нулю, то он получает 2, а если единице, то 1. Так:

$$\text{игрок 1 получит} \begin{cases} 1 \text{ в ситуации } (1, 0, 0) \\ 2 \text{ в ситуации } (0, 1, 1) \end{cases} \qquad (15)$$

Выигрыши игроков в каждой ситуации также составляют тройки чисел. Эти тройки выигрышей в ситуациях в чистых стратегиях записаны на рис. 5 при соответствующих вершинах куба.

В каждой ситуации в смешанных стратегиях игрок получает случайный выигрыш, который измеряется ожидаемым выигрышем. Напомним, что ожидаемый выигрыш определяется как сумма произведений каждого возможного выигрыша на его вероятность (см. п. 4 и 5 § 4). Если мы имеем дело с ситуацией в смешанных стратегиях, описываемой тройкой (p_1, p_2, p_3), то в ее условиях каждая из ситуаций в чистых стратегиях имеет некоторую вполне определенную вероятность, которую легко подсчитать. Так:

ситуация (1, 0, 0) имеет вероятность $p_1(1-p_2)(1-p_3)$,

ситуация (0, 1, 1) имеет вероятность

$$(1-p_1)\,p_2p_3, \tag{16}$$

ситуация (1, 1, 1) имеет вероятность $p_1p_2p_3$. и т. п.

Поэтому ожидаемый выигрыш игрока 1 в ситуации в смешанных стратегиях (p_1, p_2, p_3) согласно (15) и (16) будет равен

$$p_1(1-p_2)(1-p_3)+2(1-p_1)\,p_2p_3. \tag{17}$$

В силу аналогичных причин ожидаемый выигрыш игрока 2 в этой ситуации будет равен $(1-p_1)\,p_2(1-p_3)+$ $+\,2p_1(1-p_2)\,p_3$, а выигрыш игрока 3 — $(1-p_1)\times(1-p_2)\,p_3+2p_1p_2(1-p_3)$.

3. Займемся нахождением оптимальных исходов описанной игры. В качестве таковых, как и в других играх в нормальной форме, мы будем рассматривать ситуации равновесия.

В п. 3 § 1 мы определили ситуацию равновесия как такую ситуацию, отклонения от которой невыгодны ни одному из игроков, т. е. в которой его (ожидаемый) выигрыш не меньше, чем будет его (ожидаемый) выигрыш после его отклонения от этой ситуации, при условии, что остальные игроки не изменят своих стратегий.

Далее мы перечислим все ситуации равновесия в рассматриваемой игре.

Сначала опишем ситуации равновесия, в которых один из игроков (пусть для определенности это будет игрок 1) выбрал какую-то свою чистую стратегию. Тогда для любого другого игрока (скажем, для игрока 2) наилучшим будет выбрать чистую стратегию, отличную от той, которую выбрал 1. Ни тому, ни другому здесь не будет оснований отклоняться от своей стратегии. Третьему же игроку в этих условиях будет и вовсе безразлично, какую стратегию выбрать: при любых своих действиях он не получит ничего, так что любое изменение его стратегии не послужит его выгоде (как, впрочем, не нанесет ему и ущерба).

Таким образом, в рассматриваемой игре все ситуации равновесия, в которых хотя бы один игрок выбирает чистую стратегию, имеют следующую характеризацию: два любых игрока выбирают различные чистые стратегии, а оставшийся выбирает любую свою стратегию, чистую или смешанную. Геометрическое место таких ситуаций на кубе всех ситуаций отмечено жирной линией, проходящей по шести ребрам куба (см. рис. 5).

Проведем теперь следующее рассуждение. Как уже говорилось, ситуацию равновесия можно понимать как условия «самособлюдающегося» договора. Если же два игрока договорятся играть различные чистые стратегии, то, что бы третий ни делал, он ничего не получит, в то время как один из договорившихся обязательно будет выигрывать. Единственно, на что может при этом повлиять третий, так на то, кто именно из договорившихся выиграет.

Вместе с тем мы имеем дело с «симметричной» игрой: все три игрока входят в рассматриваемую игру совершенно равноправно. Поэтому справедливость требует искать такие ситуации равновесия, в которых выигрыши игроков равны (из общих теоретических соображений, в которые мы здесь вдаваться не имеем возможности, следует, что такие ситуации равновесия в «симметричных» играх всегда имеются).

Только что нами были описаны все ситуации равновесия, в которых хотя бы один из игроков имеет чистую стратегию. Обратимся теперь к перечислению остальных ситуаций равновесия, в которых все участвующие стратегии смешанные. Пусть (p_1, p_2, p_3) — такая ситуация равновесия, так что в ней $0 < p_1, p_2, p_3 < 1$.

Запишем условия равновесности ситуации (p_1, p_2, p_3) аналитически.

Заметим для этого прежде всего, что по условию равновесности выигрыш игрока 1 в этой ситуации не должен увеличиться при замене p_1 на 0 и на 1:

$$p_1 (1 - p_2)(1 - p_3) + 2(1 - p_1) p_2 p_3 \geqq 2 p_2 p_3, \quad (18)$$

$$p_1 (1 - p_2)(1 - p_3) + 2(1 - p_1) p_2 p_3 \geqq (1 - p_2) \times \times (1 - p_3). \quad (19)$$

Отсюда между прочим уже будет следовать, что выигрыш 1 в ситуации (p_1, p_2, p_3) не увеличится при замене p_1 на произвольное $0 < p_1 < 1$. Действительно, умножая (18) почленно на $1 - p_1$, а (19) — на p_1 и складывая, мы получаем $p_1 (1 - p_2)(1 - p_3) + 2(1 - p_1) p_2 p_3 \geqq \geqq p_1 (1 - p_2)(1 - p_3) + 2(1 - p_1) p_2 p_3$.

Итак, неравенства (18) и (19) являются условиями «приемлемости» ситуации (p_1, p_2, p_3) для игрока 1. Преобразуем путем приведения подобных членов эти условия к более удобному виду: $p_1(1-p_2)(1-p_3) \geqq 2p_1p_2p_3$, $2(1-p_1)p_2p_3 \geqq (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)$.

Но ввиду того что по предположению $0 < p_1 < 1$, в этих неравенствах можно произвести сокращение, в результате чего мы получим $(1-p_2)(1-p_3) \geqq 2p_2p_3$, $2p_2p_3 \geqq (1-p_2)(1-p_3)$;
т. е.

$$2p_2p_3 = (1-p_2)(1-p_3). \qquad (20)$$

Но все три игрока входят в нашу игру симметрично. Поэтому мы, проводя аналогичные рассуждения, получаем $2p_1p_3 = (1-p_1)(1-p_3)$, $2p_1p_2 = (1-p_1)(1-p_2)$.

Перемножение всех этих трех равенств дает нам $8p_1^2p_2^2p_3^2 = (1-p_1)^2(1-p_2)^2(1-p_3)^2$,
или

$$2\sqrt{2}p_1p_2p_3 = (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3) \qquad (21)$$

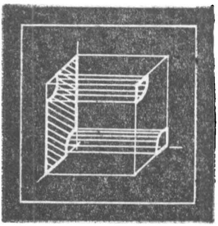
(ввиду положительности всех чисел p_i и $1-p_i$ при извлечении корня мы можем ограничиться его арифметическим значением). Разделим теперь (21) на (20): $p_1\sqrt{2} = 1-p_1$, откуда $p_1 = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1 \approx 0,41$. Точно так же получается, что и $p_2 = p_3 = \sqrt{2}-1 \approx 0,41$.

Выигрыш каждого игрока в этой ситуации равновесия теперь может быть подсчитан по формуле (17). Он оказывается равным

$$(\sqrt{2}-1)(2-\sqrt{2})^2 + 2(2-\sqrt{2})^2(\sqrt{2}-1)^2 =$$
$$= 2(\sqrt{2}-1)^3 + 2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^3 =$$
$$= 2(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)^2 = 2(2+1-2\sqrt{2}) =$$
$$= 2(3-2\sqrt{2}) \approx 0,34.$$

Ситуацию (0,41, 0,41, 0,41) (на рис. 5 она отмечена точкой внутри куба) можно принять в качестве единственных условий справедливого и устойчивого договора в рассматриваемой игре. Справедливость этой ситуации состоит в равенстве выигрышей игроков в ней, а устойчивость — в равновесности. Вместе с тем выгодной эта ситуация не будет: все три игрока получают в ней 1,23 единицы.

Наиболее выгодными в нашей игре будут ситуации, в которых один из игроков ведет рекламу вечером, а два других — утром (или, что в данном случае то же самое, не ведут ее вовсе). При этом суммарный выигрыш игроков будет равен двум единицам. В этом случае мыслим следующий, «кооперативный», вариант игры. Один из игроков выступает с рекламой вечером и получает 2, отдавая каждому из остальных игроков «отступное» в размере $^2/_3$. Читатель может развить эту линию сюжета в духе сказанного в § 7 и 8, допуская даже несимметричность игры.



§ 10. ЭКОЛОГИЧЕСКИЙ КОНФЛИКТ

1. Уже в предыдущем параграфе нами рассматривалось такое положение дел, при котором некоторое действие, совершаемое малым числом участников конфликта, доставляет этим участникам выгоды и при этом само по себе никому не причиняет ущерба; совершенное же одновременно большим числом участников конфликта, оно наносит вред всем, в том числе тем, кто его совершил. Именно такого типа оказываются многие вопросы природопользования. Действительно, если некоторый природный ресурс будет потребляться (напрягаться, портиться) малым числом природопользователей, то вполне может быть, что эти природопользователи совершают экономически выгодные для себя действия, не представляющие опасности для данного природного ресурса (например, ввиду его регенерации) и тем самым для всех игроков, представляющих как бы общество в целом. Потребление же этого ресурса большим числом природопользователей подрывает возможности восстановления ресурса и оказывается в конечном счете невыгодным для всех.

Десяток грибников наберут в небольшой рощице по хорошей корзинке грибов, а тысяча просто вытопчет все. Но ведь грибники идут в рощу, не сговариваясь, и каждый из них мнит себя из того десятка, который «обогащается не вредя». Нужно быть воспитанным до самоотверженности, чтобы, увидев следы многочисленных, уже побывавших в роще грибников, не попытаться урвать и себе из того, что осталось, малую толику грибов, а воздержаться от дальнейшего разорения рощи, отлично к тому же сознавая, что такой уход уже мало что может спасти.

Так стихийно создается экономически весьма невыгодная ситуация равновесия, когда для каждого пришедшего в лес грибника оказывается невыгодным отклониться от своего первоначального намерения пособирать грибы. Напротив, объявить данную рощу заповедной для грибников — значит создать в высшей степени неустойчивую ситуацию. Каждый, подошедший к такой роще, может соблазниться зайти и набрать корзинку грибов («все равно ведь погниет!»). А так как это может быть именно к а ж д ы й, заповедная роща опять-таки оказывается под угрозой.

Отсюда вытекает достаточно, впрочем, известный вывод о том, что недостаточно декларировать заповедность того или иного природного объекта, а необходимо подкреплять эту декларацию надлежащими мерами. Таких мер можно придумать довольно много, в том числе охрану «зеленым патрулем». Мы рассмотрим две другие меры.

Первая мера носит как бы административный характер и состоит в следующем. Всем возможным посетителям данной рощи (так сказать, «потенциальным грибникам») предоставляется п р а в о б е з в о з м е з д н о г о, н о о г р а н и ч е н н о г о ее посещения (например, не более чем столько-то раз в сезон, или не более чем такое-то общее количество часов пребывания в роще, или, наконец, сбор не более чем такого-то количества грибов). Желательно, чтобы эта мера была устойчивой, «самоконтролирующейся», т. е. чтобы ни один грибник, даже не находящийся под наблюдением «зеленого патруля», не превысил бы предоставленную ему квоту.

Другая мера, более экономической природы, состоит в п р о д а ж е б и л е т о в, д а ю щ и х п р а в о н е о г р а н и ч е н н о г о посещения рощи и сбора грибов в ней. Если кто-нибудь вздумает въехать в лес на автомобиле, то и на машину придется взять особый билет. Встает вопрос об обоснованных ценах на такие билеты. Будем предполагать, что доход от продажи билетов будет обращаться на компенсацию ущерба от вытаптывания рощи. Встает вопрос об обоснованных (справедливых) ценах на разные категории билетов.

2. В этом и в следующем параграфах мы проанализируем две поставленные выше задачи, причем для простоты и единообразия рассмотрения сделаем их участниками уже знакомые нам предприятия.

Как и следовало ожидать, основная продукция известных нам предприятий «Зари», «Луча» и «Утра» отнюдь не сводится к елочным игрушкам, а представляет собой нечто вполне респектабельное.

Предположим, что для выпуска этой продукции предприятия забирают воду из некоторого водоема и в него же спускают отработанную воду. Каждое из предприятий может работать по двум технологическим схемам. В соответствии с первой схемой отработанная вода оказывается загрязненной; безнаказанно ее можно сбрасывать в водоем лишь до некоторого предела, после чего вода в нем станет непригодной без предварительной обработки даже для нужд самих расположенных по берегам водоема предприятий, и расходы по этой технической обработке забираемой воды будут возрастать с ростом количества сбрасываемой загрязненной воды. В соответствии со второй схемой отработанная вода остается сравнительно чистой и может в любых количествах сбрасываться в водоем, не нарушая его экологического баланса.

Естественно предположить, что использование второй технологии обходится предприятию дороже, чем использование первой, однако склонность экономить на технологии в рассматриваемых условиях (т. е. склонность сбрасывать неочищенную воду) будет сдерживаться опасением, что такая «экономия» станет достаточно распространенным явлением и обернется потерями, которые превзойдут ее самое.

3. Составим по описанной выше схеме следующую игру.

Участниками рассматриваемой игры пусть являются игроки 1, 2 и 3, располагающие двумя (первой и второй) стратегиями каждый. Таким образом, в конструируемой игре всего будет 8 ситуаций в чистых стратегиях. Как и в предыдущем примере, введем в рассмотрение ситуации в смешанных стратегиях: тройки вида (p_1, p_2, p_3), где каждое p_i, являющееся вероятностью выбора игроком i своей первой чистой стратегии, лежит между 0 и 1. Этим ситуациям можно поставить в одноодназначное соответствие точки единичного куба, причем вершины этого куба будут соответствовать ситуациям в чистых стратегиях.

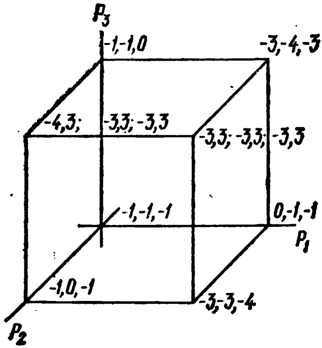


Рис. 6

При подсчете значений функций выигрыша игроков в игре будем исходить из следующих произвольных, но вполне правдоподобных (и во всяком случае мыслимых) допущений. Именно, будем считать, что использование каждым предприятием второй технологической схемы требует от него дополнительных затрат в 1 единицу по сравнению с применением первой. Использование первой технологии не более чем одним предприятием не порождает вовсе потерь от загрязнения воды. Если первую технологию применяют предприятия 1 и 2 или 1 и 3, то потери от загрязнения воды для каждого ее использователя составят 3 единицы, а если применяют 2 и 3 или, наконец, все три предприятия сразу, то 3,3 единицы.

Сделанные численные предположения позволяют выписать значения функций выигрыша каждого из игроков в каждой из ситуаций. Например, если игроки 1 и 3 применяют свою первую чистую стратегию, а игрок 2 — вторую, то выигрыши игроков 1, 2 и 3 будут соответственно равны —3, —4, —3 (стоящие здесь минусы соответствуют тому, что выигрыши суть затраты, потери, взятые с обратным знаком). Так подсчитанные тройки выигрышей на рис. 6 выписаны при всех вершинах куба ситуаций.

Интересующая нас игра полностью описана.

4. Будем искать в построенной игре ситуации равновесия. Они соответствуют возможным устойчивым договорам между нашими водопользователями, причем, как уже неоднократно отмечалось, устойчивость понимается здесь в том смысле, что ни один нарушитель договора не увеличит от такого нарушения своего выигрыша (или, выражаясь более житейски, не уменьшит своих потерь). Их можно интерпретировать так же, как некоторые предписываемые надлежащей властью нормативы регионального водопользования; в этом случае устойчивость можно понимать как их соблюдение, даже при отсутствии контроля.

Итак, пусть (p_1, p_2, p_3) — ситуация равновесия (вообще говоря, в смешанных стратегиях). Выпишем и проанализируем условия ее равновесности. Ограничимся анализом «приемлемости» этой ситуации для игрока 1 (остальные условия равновесности рассматриваются аналогично).

Ожидаемый выигрыш игрока 1 в ситуации (p_1, p_2, p_3) подсчитывается по той же схеме, что и в случае игры из предыдущего параграфа. Он равен:

$$\begin{aligned}-1(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3) &- 1(1-p_1)p_2(1-p_3) - \\ &- 1(1-p_1)(1-p_2)p_3 - \\ &-4{,}3(1-p_1)p_2p_3 - \\ &-3p_1p_2(1-p_3) - \\ &-3p_1(1-p_2)p_3 - \\ &-3{,}3p_1p_2p_3.\end{aligned}$$

Мы ищем неизвестные p_1, p_2 и p_3 из условий неувеличения выигрыша (т. е. неуменьшения потерь) игрока 1 при замене им его смешанной стратегии, соответствующей параметру p_1, на какую-либо его другую стратегию. В предыдущем примере оказалось достаточным выписать условия такого неувеличения при заменах p_1 только на 0 и на 1. Ясно (и во всяком случае нетрудно проверить), что это достаточно и в нашем примере. Здесь эти условия записываются в виде следующих неравенств:

$$\begin{aligned}-(1-p_1(1-p_2)(1-p_3) &- (1-p_1)p_2(1-p_3) - \\ &- (1-p_1)(1-p_2)p_3 - \\ &- 4{,}3(1-p_1)p_2p_3 - \\ &-3p_1p_2(1-p_3) - \\ &- 3p_1(1-p_2)p_3 - \\ &- 3{,}3p_1p_2p_3 \\ \geqq -(1-p_2)(1-p_3) &- p_2(1-p_3)-(1-p_2)p_3 - \\ &- 4{,}3p_2p_3\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3) &- (1-p_1)p_2(1-p_3) - \\ &-(1-p_1)(1-p_2)p_3 - \\ &- 4{,}3(1-p_1)p_2p_3 - \\ &- 3p_1p_2(1-p_3) - \\ &- 3p_1(1-p_2)p_3 - \\ &- 3{,}3p_1p_2p_3 \\ \geqslant &- 3p_2(1-p_3)-3(1-p_2)p_3 - \\ &- 3{,}3p_2p_3.\end{aligned}$$

Преобразуем, как и в предыдущем параграфе, эти неравенства к более удобному виду, перенеся в первом из них слева направо первые четыре члена:

$$\begin{aligned}&- 3p_1p_2(1-p_3) - 3p_1(1-p_2)p_3 - \\ &- 3{,}3p_1p_2p_3 \\ \geqq -p_1(1-p_2)(1-p_3) - p_1p_2(1-p_3) &- p_1(1-p_2)p_3 - \\ &- 4{,}3p_1p_2p_3,\end{aligned}$$

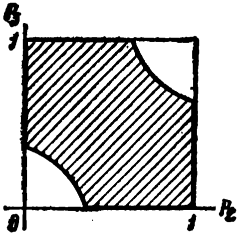


Рис. 7

а во втором — последние три:

$$\begin{aligned}&-(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)-\\&-(1-p_1)p_2(1-p_3)-\\&-(1-p_1)(1-p_2)p_3-\\&-4{,}3(1-p_1)p_2p_3\\ \geqslant&-3(1-p_1)p_2(1-p_3)-\\&-3(1-p_1)(1-p_2)p_3-\\&-3{,}3(1-p_1)p_2p_3.\end{aligned}$$

Приведение подобных членов даст нам:

$$0 \geqq -p_1(1-p_2)(1-p_3)+2p_1p_2(1-p_3)+ \\ +2p_1(1-p_2)p_3-p_1p_2p_3, \qquad (22)$$

$$0 \leqq -(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)+2(1-p_1)p_2(1-p_3)+ \\ +2(1-p_1)(1-p_2)p_3-(1-p_1)p_2p_3. \qquad (23)$$

Какие же ситуации удовлетворяют этим неравенствам? Опишем отдельно те из них, для которых $p_1=0$, $p_1=1$ и $0<p_1<1$.

Если $p_1=0$, то неравенство (22) превращается в тождество, выполняющееся автоматически, и как условие может быть отброшено. Неравенство же (23) превращается в

$$0 \leqq -(1-p_2)(1-p_3)+2p_2(1-p_3)+2(1-p_2)p_3- \\ -p_2p_3 \qquad (24)$$

или, после очевидных упрощений,

$$0 \leqq -1+3p_2+3p_3-6p_2p_3. \qquad (25)$$

Множество пар (p_2, p_3), для которых $0 \leqq p_2, p_3 \leqq 1$ и выполняется это неравенство, составляет заштрихованную часть единичного квадрата, лежащую между двумя дугами гиперболы (см. рис. 7), включая сами эти дуги.

Если $p_1=1$, то тождественным оказывается неравенство (23), а (22) после упрощений дает нам

$$0 \geqq -1+3p_2+3p_3-6p_2p_3. \qquad (26)$$

Множество таких пар на рис. 7 описывается двумя незаштрихованными кусками квадрата вместе с их границами.

Наконец, если $0<p_1<1$, то оба неравенства (22) и (23) поддаются сокращению на p_1 и соответственно на $1-p_1$, что дает нам одновременно оба неравенства (25) и (26), т. е. равенство

$$0=-1+3p_2+3p_3-6p_2p_3. \qquad (27)$$

Значит, при любом p_1, расположенном строго между 0 и 1, геометрическое место точек (p_2, p_3), удовлетворяющих нашему условию, есть пара дуг гиперболы.

Полное множество ситуаций, удовлетворяющих неравенствам (22) и (23), изображено на рис. 8.

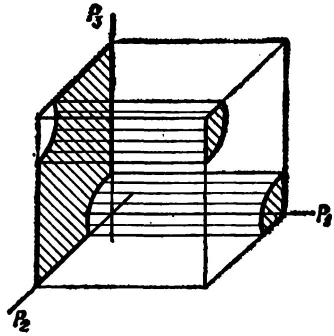


Рис. 8

Похожие множества составляют и ситуации, от которых невыгодно отклоняться игроку 2 (и соответственно игроку 3).

Первое из них представляет собой кусок цилиндрической поверхности с уравнением

$$-1 + 3p_1 + 3p_2 - 5{,}7p_1p_2 = 0, \qquad (28)$$

дополненной соответствующими кускам горизонтальных граней куба ситуаций, а второе — куском цилиндрической поверхности с уравнением

$$-1 + 3p_1 + 3p_3 - 5{,}7p_1p_3 = 0, \qquad (29)$$

и опять-таки с соответствующими плоскими дополнениями.

Общая часть всех этих описанных множеств имеет только одну точку, лежащую на поверхности куба: ситуацию

$$(1, 1, 1) \qquad (30)$$

Остальные ситуации равновесия лежат строго внутри куба ситуаций. Для них $0 < p_1, p_2, p_3 < 1$, и потому они должны лежать на пересечении всех трех гиперболических цилиндров с уравнениями (27), (28) и (29). Значит, для нахождения этих точек надо решить систему уравнений (27), (28) и (29).

Делается это достаточно просто, тем более что в (28) и (29) неизвестные p_2 и p_3 входят относительно p_1 одинаковым образом и находятся по p_1 однозначно. Следовательно, при каждом значении p_1 из какого-либо решения системы в этом решении должно быть $p_2 = p_3$. Поэтому, полагая в (27) $p_2 = p_3 = p$, мы получаем $6p^2 - 6p + 1 = 0$, откуда

$$p = p_2 = p_3 = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6} = \begin{cases} \dfrac{3+\sqrt{3}}{6} \approx 0{,}79 \\ \dfrac{3-\sqrt{3}}{6} \approx 0{,}21. \end{cases}$$

Далее, из (26) мы находим $p_i = \frac{1-3p}{3-5,7p}$, так что $p_1 = 0,92$ и $p_1 = 0,19$.

Таким образом, дополнительно к найденной ситуации равновесия (30) мы получаем еще вторую и третью ситуации равновесия

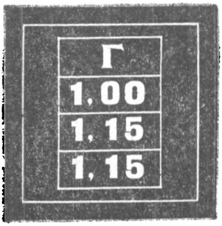
$$(0,92;\ 0,79;\ 0,79),\ (0,19;\ 0,21;\ 0,21). \qquad (31)$$

5. Каждая из трех найденных ситуаций равновесия отражает некоторое возможное психологическое отношение ко всей проблеме со стороны ее участников и органа, регулирующего природопользование.

Ситуация (1, 1, 1), ориентированная на безоговорочное загрязнение воды всеми предприятиями, соответствует отсутствию какого-либо внешнего регулирования вопроса, при котором участники ищут себе оправдания в формуле: «а что мне остается делать?»

Ситуация (31) соответствует весьма мягкому варианту правил водопользования и допускает все-таки значительное загрязнение водоема. Положительная ее роль состоит, пожалуй, в том, что предприятия вынуждены действовать все-таки с какой-то оглядкой на последствия от своих действий и понимать, что увеличение вероятности загрязнения воды бьет прежде всего (подчеркнем еще раз, что именно в этом суть ситуации равновесия!) по собственным интересам. Заметим здесь же, что такие мягкие правила по отношению к менее опасному источнику загрязнения оказываются несколько более снисходительными, чем по отношению к более опасным: они дозволяют ему применять загрязняющую технологию с вероятностью 92% против 79% для остальных.

Ситуация (31) отвечает, напротив, довольно жесткому варианту правил: загрязнение запрещается, если его вероятность превосходит $^1/_5$. И в этом случае ни один из водопользователей не заинтересован в нарушении правил. К сожалению, он не заинтересован также в том, чтобы сознательно загрязнять водоем с меньшей вероятностью, чем ему это позволено, но таково уж свойство равновесия. Жесткие правила водоочистки в противоположность мягким более требовательны к менее опасным источникам загрязнения. Первым загрязняющая технология разрешается с вероятностью 19%, а вторым — с вероятностью 21%. Читатель может представить себе качественную картину административных мер, отвечающих различным ситуациям равновесия в случае охраны грибной рощи.



§ 11. СПРАВЕДЛИВОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ШТРАФА

1. Пусть мы по-прежнему имеем дело с тремя предприятиями, загрязняющими водоем. На этот раз мы будем, однако, воспринимать загрязнение как совершившийся факт и ставить вопрос не о действиях администрации предприятия, которые могли бы это загрязнение предотвратить или хотя бы смягчить (т. е. так, как ставился вопрос в § 10), а о справедливом в каком-то смысле распределении общего штрафа, налагаемого за участие в загрязнении воды.

Понятие справедливости применительно к распределению штрафа естественно вводить аксиоматически. Поступая согласно уже имеющегося трафарета, примем следующие две аксиомы.

Аксиома 1. Пусть группа игроков, осуществляющих свою производственную деятельность, наносит некоторый определенный экологический ущерб, причем добавление к этой группе новых членов не увеличит размеров этого ущерба, а выбытие из нее любого члена «обезвреживает» всю коалицию, так что оставшиеся игроки экологического ущерба не причиняют. * Будем тогда считать справедливым, чтобы при налагании на группы штрафа за экологический ущерб сумма этого штрафа делилась между членами группы поровну [1].

Аксиома 2. Предположим, что некоторый игрок участвует в играх $\Gamma_1, \Gamma_2 \ldots$ и справедливые штрафы,

[1] Быть может, здесь особенно уместно подчеркнуть следующее обстоятельство. Данная (а если вдуматься, то и вообще всякая) аксиома состоит из двух частей, которые можно было бы объединить в одно сложноподчиненное предложение, в котором вводимое союзом «если» придаточное простирается до места, отмеченного звездочкой. При этом мы не интересуемся ни актуальностью, ни даже реальностью этого условия. Более того, с формально-логической точки зрения, чем менее реалистично условие, тем реже придется применять аксиому и тем меньше она нас будет связывать. Так и в нашем случае некоторая нарочитость в условии нас смущать не должна. Вместе с тем очевидно, что это условие выражает полную «симметрию» вхождения участников в игру, т. е. их «равноучастие» в совершаемом деле.

налагаемые на него, равны соответственно $a_1, a_2 \ldots$ Рассмотрим новую игру Г, состоящую в проведении g_1 партий игры Γ_1, g_2 партий игры Γ_2 и т. д. Тогда справедливым штрафом игрока в игре Г будем считать $a_1g_1 + a_2g_2 + \ldots$

2. Вернемся к картине из предыдущего параграфа и предположим, что указанные там убытки от загрязненности воды в точности отражают экологически вредную и облагаемую штрафом деятельность предприятий. Таким образом, мы будем считать, что 1, 2 и 3 по отдельности наносят ущерб, равный нулю; 1 и 2, а также 2 и 3 наносят ущерб, равный 3; 3 и 2, а также 1, 2 и 3 вместе наносят ущерб, равный 3,3.

Введем в рассмотрение игру Γ_A, в которой каждая коалиция А, будучи отделена от остальных игроков, должна была бы платить штраф, равный ущербу, который она наносит.

Для подсчета справедливого распределения штрафа согласно предложенным аксиомам рассмотрим простейшие игры Γ_A, где А — минимальная «вредящая» коалиция. В каждой из этих игр Γ_A штраф, налагаемый на каждого игрока из А, пусть будет равен 1.

Описание штрафов во всех этих играх, а также получающихся штрафов в игре можно свести в следующую таблицу.

Таблица 9

Коалиция \ Игра	Γ_{12}	Γ_{13}	Γ_{23}	Γ_{123}	Г
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
12	1	0	0	0	3
13	0	1	0	0	3
23	0	0	1	0	3,3
123	1	1	1	1	3,3

Коэффициенты, с которыми следует брать игры Γ_{12}, Γ_{13}, Γ_{23} и Γ_{123}, чтобы получить комбинацию, равную игре Г, очевидно, должны удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} g_{12} &= 3, \\ g_{13} &= 3, \\ g_{23} &= 3{,}3, \\ g_{12} + g_{13} + g_{23} + g_{123} &= 3{,}3. \end{aligned}$$

Здесь коэффициенты g_{12}, g_{13} и g_{23} фактически уже найдены, а из последнего уравнения вытекает, что $g_{123} = -6$. Таким образом, можно положить $\Gamma = 3\Gamma_{12} + 3\Gamma_{13} + 3{,}3\Gamma_{23} - 6\Gamma_{123}$.

На основании аксиомы 1 мы можем найти справедливые штрафы отдельных игроков в играх Γ_{12}, Γ_{13}, Γ_{23} и Γ_{123}, сведенные в табл. 10.

Таблица 10

Игрок \ Игра	Γ_{12}	Γ_{13}	Γ_{23}	Γ_{123}	Γ
1	0,5	0,5	0	333	1,0
2	0,5	0	0,5	333	1,15
3	0	0,5	0,5	0,33	1,15

Мы видим, что в данных конкретных условиях штраф каждого из более опасных водопользователей должен на 15% превосходить штраф менее опасного.

И снова читателю предлагается представить себе, как будет выглядеть сходная постановка вопроса применительно к охране грибной рощи.

§ 12. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Теория игр является современной, научной методикой принятия оптимальных решений в условиях противоречий, в условиях конфликта, в условиях неполного знания тех обстоятельств, в которых приходится принимать решение. Теория игр помогает преодолевать субъективные, волюнтаристические черты в выработке оптимальных решений. Будучи математической наукой, теория игр сообщает своим выводам непреложную математическую убедительность и, кроме того, дает основания для их количественных формулировок.

Отсюда следует, что в теории игр заключены огромные потенциальные возможности приложений, значение которых едва ли можно переоценить.

2. Попытки использовать достижения теории игр на практике связаны с разнообразными трудностями, преодоление которых каждый раз составляет самостоятельную задачу.

Прежде всего затруднительно само построение игры как модели принятия решений. Кого считать игроками, какими стратегиями наделять игроков, какие выигрыши приписывать им в каждой из ситуаций — рассмотрение всех этих вопросов требует часто более глубокого проникновения в суть изучаемых явлений и более точных измерений численных характеристик этих явлений, чем подчас допускает современная наука.

Но и после создания модели остается немало работы и прежде всего работы математической. Для построенной игры нужно установить принципы оптимальности, доказать их реализуемость и фактически найти хотя бы некоторые реализации.

Но даже решением всех относящихся к делу математических задач не заканчиваются все трудности. Рекомендуемое решение, которое теорией игр квалифицируется как оптимальное, может встретить возражения или внутреннее психологическое сопротивление со стороны принимающего решение лица. Например, ориентация на ожидаемый (а не на уверенный) выигрыш и тем более применение смешанных стратегий могут вступить в противоречие с его чувством осторожности. С другой стороны, *c*-ядро или Н-М-решение могут содержать одновременно много различных и не равноценных для отдельных игроков дележей. Мы уже видели противоречия между выгодностью, устойчивостью и справедливостью, разрешение которых составляет предмет дальнейших, весьма непростых задач.

Перечисленные трудности, хотя и сдерживают широкое применение теории игр, но во многих случаях успешно преодолеваются.

Во всяком случае уже из содержащегося в этом очерке материала видно, что теория игр проясняет многие тонкие и сложные вопросы принятия оптимальных решений.

11 коп. Индекс 70096